Sopra alcune notevoli configurazioni di punti, rette e piani di coniche e superficie di 2° grado e di altre curve e superficie.

Memorie due di G. VERONESE

approvate per la stampa negli Atti dell'Accademia
nella seduta del 6 febbraio 1881.

MEMORIA I.

In questa Memoria dimostro e completo i teoremi della mia prima Nota, pubblicata nei Transunti della r. Accademia dei Lincei, nel mese di aprile, testè passato. Se di un punto P si trova il piano polare π rispetto ad una superficie di 2° grado S_1 e di questo il polo P_1 rispetto ad un'altra superficie di 2° grado S_2, di questo il piano polare π_1 rispetto alla S_1 e così di seguito, si ottengono due gruppi projettivi l'uno di punti e l'altro di piani (1), che non si chiudono; vale a dire nessun punto o piano, così ottenuto coincide col punto o piano di partenza. La condizione affinchè l'ennesimo punto del gruppo debba cadere in P, richiede che le due superficie S_1 S_2 abbiano una posizione speciale; data infatti la S_1 ci sono altre $n^3—1$ superficie di 2° grado, che formano con essa un *ciclo* di n^3 superficie; per due qualunque delle quali l'ennesimo punto del gruppo cade in P. Se si dispongono le n^3 superficie in un dato ordine e di un punto P si trova il piano polare rispetto alla 1ª, di questo il polo rispetto alla 2ª, di questo il piano polare rispetto alla terza e così via, si ottengono due cicli uno di n^3 punti ed uno di n^3 piani, indipendenti dall'ordine delle n^3 superficie e che perciò sono polari reciproci rispetto a ciascuna di esse. Nel piano si ottiene con analoghe considerazioni un ciclo di n^2 coniche. In questa Iª Memoria studio le proprietà generali dei gruppi projettivi in relazione con questi cicli di superficie di 2° grado e di coniche, di punti e di piani ecc.

Considero i casi speciali in cui $n=2$ ed $n=3$ e ne faccio un'applicazione alla curva del 3° ordine piana. Nella IIª Memoria sviluppo invece il caso $n=2$ nello spazio (2).

PARTE I.

1. Teorema I. Se si considerano due coniche C_1 C_2 qualunque e di un punto P_1 si determina la polare rispetto alla C_1, di questa il polo rispetto alla C_2, di questo la polare rispetto alla C_1 e così

(1) Dei gruppi projettivi aperti e chiusi di punti si sono occupati, per quanto so, Battaglini nelle sue tre Memorie: *Sulle involuzioni dei diversi ordini*; r. Acc. di Napoli, vol. I, II, VII; Clebsch e Gordan nei Math. Annalen, vol. I, *Ueber biter. Formen* e Lüroth nei Math. Annalen, vol. XI e XIII.

(2) Vedi Indice p. 343.

di seguito, si ottiene un gruppo projettivo di punti $P_1 P_2 ... \equiv (P)$ e un gruppo projettivo di polari $p_1 p_2 ... \equiv (p)$, che non si chiudono qualunque sia il numero di volte, che si ripete l' operazione. Essi sono polari reciproci, rispetto alle due coniche.

Chiamo questa operazione trasformazione polare del punto P_1 rispetto alle due coniche, disposte nell' ordine $C_1 C_2$; se si tratta di più coniche, le trasformazioni di un punto P_1 sono tante quante le permutazioni, che si ottengono dal numero delle coniche.

Siano infatti due coniche C_1 C_2 riferite entrambe al triangolo conjugato comune cioè:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \quad C_1$$
$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 = 0 \quad C_2 .$$

In questo caso sono due le trasformazioni polari cioè $C_1 C_2$ e $C_2 C_1$. Consideriamo la $C_1 C_2$. Del punto P_1 adunque faccio l'operazione indicata nel teorema, ottengo così un gruppo di punti $P_1 P_2 P_3 \ldots P_{n+1} \ldots$ che hanno le coordinate della forma:

$$y_i, \ \frac{1}{a_i} y_i, \ldots, \frac{1}{a_i^n y_i} \qquad i = 1, 2, 3$$

e un gruppo di rette $p_1 p_2 ... p_{n+1}$ di coordinate:

$$y_i, \ \frac{1}{a_i} y_i, \ldots, \frac{1}{a_i^n} y_i .$$

L' altra trasformazione polare, cioè $C_2 C_1$, ci dà invece un gruppo di punti $P_1 P_{-1} P_{-2} .... P_{-n-1}$, di coordinate:

$$y_i \quad a_i y_i \ \ldots \ a_i^n y_i$$

e un gruppo di rette $p_{-1} p_{-2} \ldots p_{-n}$, di coordinate

$$a_i y_i \quad a_i^2 y_i \ldots . \ a_{in} y_i$$

Nell'una o nell'altra trasformazione non è possibile, che P_{n+1} o P_{n-1} coincida con P_1, almeno che non siano soddisfatte le condizioni $a_i^n = 1$; caso che considereremo in seguito. I punti $P_1 P_2 P_3 ... P_{n+1} ...$ si chiamano i consecutivi del punto P_1 nella 1ª trasformazione e $P_{-1} P_{-2} ...$ i consecutivi nella 2ª. I punti P_2 nella 1ª e P_{-1} nella 2ª si chiamano i punti immediatamente consecutivi di P_1. Analogamente per le rette. Osservo però che, mentre i punti $P_1 P_2 P_3 ... P_n ...$ sono consecutivi nella 1ª trasformazione $C_1 C_2$, le rette $p_1 p_2 p_3 .... p_n$ sono consecutive nella 2ª. Le due trasformazioni $C_1 C_2$, $C_2 C_1$ sono rappresentate dalle seguenti equazioni

$$\mu x_i = a_i^n y_i \tag{1}$$

ove n è un numero intero (+) o (—).

Tutti i punti P formano un gruppo (P) e tutte le rette p un gruppo (p). È chiaro che questi due gruppi sono polari reciproci rispetto alle due coniche $C_1 C_2$. I punti del gruppo P, formano una serie di punti corrispondenti di due piani punteggiati projettivi, tale cioè che se di un punto di (P) si costruisce il corrispondente nel 2° piano, di questo considerato come appartenente al 1° piano si determina il corrispondente nel 2° e così via, si ottiene lo stesso gruppo (P). Il triangolo conjugato delle due coniche $C_1 C_2$ è il triangolo dei punti uniti dei due piani projettivi. Analogamente per le rette del gruppo (p). Se il punto P_1 è situato su uno dei lati del triangolo fondamentale, evidentemente tutti i punti del gruppo (P) sono situati su quel lato, e se la retta p passa per uno dei vertici del triangolo fondamentale, tutte le rette di (p) passano per quel vertice.

Quello che si è fatto per un punto P_1 e per una retta p_1, si può naturalmente fare per una curva L qualunque del piano; ad essa corrisponde un gruppo projettivo di curve (L), che vengono descritte dai punti consecutivi di L.

Il gruppo (P) è determinato completamente da un suo punto qualunque. È chiaro che se una retta q o curva L passa per uno o più punti del gruppo (P), le rette del gruppo (q) o curva del gruppo (L) passano rispettivamente per altrettanti punti del gruppo (P). In una retta qualunque q, ci sono sempre due punti immediatamente consecutivi di un dato gruppo di punti, infatti basta trovare di q i poli rispetto alle C_1 e C_2 e della loro retta congiungente p_1 i poli P_1 e P_2 rispetto a C_1 e C_2. Questi sono due punti immediatamente consecutivi di un gruppo (P) situati sulla q. Dunque

Teorema II. Un gruppo (P) è determinato da uno qualunque dei suoi punti.

Teorema III. Se una retta q o curva L passa per uno o più punti di un gruppo (P), le rette del gruppo (q) o le curve del gruppo (L) passano per altrettanti punti di (P).

Teorema IV. Se un punto del gruppo (P) è situato su uno dei lati del triangolo conjugato comune alle due coniche C_1, C_2, tutti i punti del gruppo cadono sul medesimo lato. Le rette del gruppo (p) polare reciproco di (P) rispetto a C_1 e C_2, passano tutte pel vertice opposto.

Teorema V. In una retta qualunque ci sono sempre due punti immediatamente consecutivi di un gruppo (P).

Come ad una curva L qualunque, corrisponde un gruppo (L), così alle due coniche fondamentali $C_1 C_2$ corrispondono pure due gruppi projettivi di coniche (R_1) e (R_2). La polare reciproca della C_2 rispetto a C_1 è $\frac{x_1^2}{a_1}+\frac{x_2^2}{a_2}+\frac{x_3^2}{a_3}=0\equiv C_3$.

La polare del punto P_1 $(y_1\, y_2\, y_3)$ rispetto a C_1 è p_1, di questa il polo rispetto a C_3 è P_{-1}, di questo la polare rispetto a C_1 è p_{-1}, di questa il polo rispetto a C_3 è P_{-2} ecc., onde i punti consecutivi di P_1 nella trasformazione $C_1 C_3$ sono $P_{-1}P_{-2} \dots P_{-n} \dots$ La polare invece di P_1 rispetto a C_3, è p_2, di questa il polo rispetto a C_1 è P_2 ecc. onde i consecutivi di P_1 nella trasformazione polare $C_3 C_1$ sono $P_2 P_3 \dots P_n \dots$, dunque i due gruppi (P) e (p) sono anche polari reciproci rispetto a C_3. La polare reciproca di $C_3 C_1$ rispetto a C_2 è

$$a_1^3 x_1^2 + a_2^3 x_2^2 + a_3^3 x_3^2 = 0$$

di questa la polare reciproca C_5 rispetto a C_1 è

$$\frac{1}{a_1^3} x_1^2 + \frac{1}{a_2^3} x_2^2 + \frac{1}{a_3^3} x_3^2 = 0 .$$

Le curve $C_3\, C_5$ ecc. sono le consecutive di C_2 nella trasformazione $C_1 C_2$, e le consecutive di essa nella trasformazione $C_2 C_1$ sono precisamente $C_2\, C_4\, C_6$ ecc. Il gruppo (L) corrispondente ad una curva L non contiene alcuna delle polari reciproche delle curve di esso rispetto ad una qualunque delle coniche fondamentali $C_1\,C_2$; infatti se ne contenesse una le conterrebbe tutte, proprietà che ha luogo solamente quando L coincide con una delle coniche $C_1\,C_2$. Mentre le coniche del gruppo (R_2), corrispondente a C_2, si mettono sotto la forma:

$$a_1^{2m+1}x_1^2+a_2^{2m+1}x_2^2+a_3^{2m+1}x_3^2=0 \qquad (1)$$

ove m è un numero intero (+) o (—), quelle del gruppo (R_1) corrispondente a C_1 sono rappresentate dall'equazione:

$$a_1^{2m}x_1^2+a_2^{2m}x_2^2+a_3^{2m}x_3^2=0 \qquad (2)$$

Da queste equazioni risulta facilmente che la polare reciproca di una conica per es. di (R_1) rispetto ad una conica di (R_1) è una conica dello stesso gruppo, e rispetto ad una conica di (R_2) è pure una conica di (R_1).

Consideriamo due coniche per es. di (R_2) cioè

$$a_1^{2m+1}x_1^2+a_2^{2m+1}x_2^2+a_3^{2m+1}x_3^2=0 \qquad (3)$$

$$a_1^{2s+1}x_1^2+\ldots\qquad\qquad=0 \qquad (4)$$

la polare di $P_1\,(y_1\,y_2\,y_3)$ rispetto alla (3) ha le coordinate della forma $a_i^{2m+1}y_i$, le coordinate del polo di essa rispetto alla (4) sono $a_i^{2(m-s)}y_i$, le coordinate della polare di questo rispetto alla (3) sono $a_i^{2(2m-s)+1}y_i$, mentre quelle del suo polo rispetto alla (4) sono $a_i^{4(m-s)}y_i$. Da ciò si vede, che i consecutivi di P_1 nella trasformazione (3) (4) sono:

$$P_{2(m-s)},\quad P_{4(m-s)},\quad P_{6(m-s)}\ \text{ecc.}$$

nella trasformazione (4) (3) sono invece

$$P_{2(s-m)},\quad P_{4(s-m)},\quad P_{6(s-m)}\ \text{ecc.}$$

Questi sono punti del gruppo (P) che corrisponde a P rispetto a $C_1\,C_2$. La differenza degli indici di due punti consecutivi è costante, cioè $2(m-s)$.

Si abbiano ora due coniche una appartenente ad (R_1) e l'altra ad (R_2) per se.

$$a_1^{2m+1}x_2^2+\ .\ .\ .\ .=0 \qquad (5)$$

$$a_1^{2s}\quad x_1^2+\ .\ .\ .\ .=0 \qquad (6)$$

La polare di P_1 rispetto alla 2ª ha per coordinate $a_i^{2m+1}y_i$, quelle del polo di essa rispetto alla 2ª sono $a_i^{2(m-s)+1}y_i$, quelle della polare di questo rispetto alla 1ª sono $a_i^{2(2m-s)+1}y_i$ ecc., onde i consecutivi di P_1 nella trasformazione (5) (6) sono:

$$P_{2(m-s)+1},\quad P_{4(m-s)+2},\quad P_{6(m-3)+3}\ \text{ecc.}$$

e quelle nella trasformazione (6) (5) sono

$$P_{2(s-m)-1},\quad P_{4(s-m)-2},\quad P_{6(m-3)+3}\ \text{ecc.}$$

Questi sono pure punti dello stesso gruppo (P) e gli indici dei punti consecutivi, immediati, dànno invece una differenza dispari costante.

Però non sono due sole le coniche rispetto alle quali questi punti formano un gruppo projettivo, perchè basta avere

$$m-s=\text{cost.}$$

e dato un valore intero qualunque ad m possiamo ricavare subito s. Dunque:

Teorema VI. Se di una delle coniche fondamentali $C_1\,C_2$ per es. C_2 si trova la polare reciproca C_3 rispetto a C_1; i punti immediatamente consecutivi di P_1 nelle trasformazioni $C_1\,C_2$ e $C_1\,C_3$ sono gli stessi.

Teorema VII. Come una curva L dà luogo ad un gruppo projettivo di curve (L) rispetto alle due coniche C_1 C_2, così C_1 C_2 dànno luogo a due gruppi di coniche (R_1) ed (R_2). — Essi sono reciproci di sè stessi rispetto a C_1 e C_2.

La polare reciproca di una conica di (R_1) rispetto ad una conica di (R_1) è un'altra conica di esso, la polare reciproca invece rispetto ad una conica di (R_2) è pure una conica di (R_1).

Teorema VIII. Una serie di punti del gruppo (P), ove gli indici di due punti consecutivi (i quali indicano il loro posto in (P)) dànno una differenza pari costante, dà un nuovo gruppo projettivo rispetto ad infiniti gruppi di due coniche di (R_1) e di (R_2). Se invece gli indici dànno una differenza dispari costante, i punti della serie formano un gruppo projettivo di punti rispetto ad infiniti gruppi di due coniche, l'una appartenente ad (R_1) e l'altra ad (R_2).

2. Ritorniamo al gruppo (P), che corrisponde ad un punto P_1 rispetto alle due coniche C_1 C_2. Se il punto P_1 cade per es. in C_1, allora la polare di P_1 rispetto ad essa, ossia p_1, è tangente a C_1; di p_1 il polo rispetto a C_2, è il punto P_2, e di P_1 la polare rispetto a C_2, è p_{-1}; p_{-1} passa dunque per P_2, onde $P_1 P_2$ sono conjugati rispetto a C_2. Di P_2 la polare rispetto alla C_1 è p_2, e il polo di p_{-1} è P_{-1}, dunque $P_{-1} P_2$ sono conjugati rispetto a C_1. Il polo di p_2 e la polare di P_{-1} rispetto a C_2 sono P_3 e p_{-2}, onde $P_{-1} P_3$ sono conjugati rispetto a C_1 e così seguitando si trovano le seguenti coppie di punti e rette conjugate

rispetto a	C_1	$P_1 P_1$,	$P_2 P_{-1}$,	$P_3 P_{-2}$ ...	$P_m P_{-m+1}$
		$p_1 p_1$,	$p_2 p_{-1}$,	$p_3 p_{-2}$ ...	$p_m p_{-m+1}$
»	C_2	$P_1 P_2$,	$P_{-1} P_3$,	$P_{-2} P_4$ ...	$P_{-m+1} P_{m+1}$
		$p_1 p_{-1}$,	$p_2 p_{-2}$,	$p_3 p_{-3}$ ...	$p_m p_{-m}$

Se P_1 è situato invece su C_2 allora p_{-1} è tangente a C_2, il polo di p_{-1} rispetto a C_1 ossia P_{-1} è situato in p_1, perciò P_1 e P_{-1} sono conjugati rispetto a C_1, così anche p_1 e p_{-1}. Il polo di p_1 e la polare di P_{-1} rispetto a C_2, sono P_2 e p_{-2}, onde P_2 e P_{-1} sono conjugati rispetto a C_2 e così p_1 e p_{-2}. Così continuando si vede, che sono conjugati

rispetto a	C_1	$P_1 P_{-1}$,	$P_2 P_{-2}$ ...	$P_m P_{-m}$
		$p_1 p_{-1}$,	$p_2 p_{-2}$ ...	$p_m p_{-m}$
»	C_2	$P_1 P_1$,	$P_2 P_{-1}$ ...	$P_m P_{-m+1}$
		$p_4 p_{-2}$,	$p_2 p_{-3}$ ...	$p_m p_{-m-1}$

Tanto in un caso che nell'altro i punti del gruppo (P) sono due a due conjugati sia rispetto a C_1 come a C_2. Ma se P_1 cade in C_1 i punti consecutivi di esso in (P) sono situati rispettivamente sulle coniche di (R_1), e perciò i punti del gruppo (P) sono due a due conjugati rispetto alle coniche di (R_1) e di (R_2) (Vedi Teor. VI, VII, VIII).

Supponiamo ora il caso che in un dato gruppo (P) il punto P_1 sia conjugato di P_m per es. rispetto a C_2. Allora la polare di P_m rispetto a C_2, ossia p_{m-1} deve contenere P_1 e la polare di P_1 rispetto a C_2, ossia p_{-1}, deve passare per P_m. La p_{m-1} ha per polo rispetto a C_1 il punto P_{m-1} e P_1 ha per polare la retta p_1; dunque P_1 e P_{m-1} sono conjugati rispetto a C_1; così la polare di P_{m-1} rispetto a C_2 è p_{m-2} e il polo di p_1 è P_2, dunque P_2 P_{m-1} sono conjugati rispetto a C_2; seguitando così si trova che sono conjugati

rispetto a C_2 $\quad P_1 P_m, \quad P_2 P_{m-1}, \quad P_3 P_{m-2} \ldots P_r P_{m-r+1}$

» $\quad C_1$ $\quad P_1 P_{m-1}, P_2 P_{m-2}, \quad P_3 P_{m-3} \ldots P_r P_{m-r}$

Ora possono aver luogo due casi o $r = m - r + 1$ da cui $r = \frac{m+1}{2}$, se m è dispari; in questo caso otteniamo una coppia di punti conjugati rispetto a C_2, che coincidono, ossia sono situati su C_2; oppure se m è pari si ha:

$$r = m - r \quad \text{o} \quad r = \frac{m}{2}.$$

In questo caso un punto del gruppo cade in C_1. Tacitamente abbiamo supposto m $(+)$. Se fosse $(-)$ succederebbe una cosa analoga. Dunque:

Teorema IX. Se due punti qualunque P_1 P_m di un gruppo projettivo (P) sono conjugati rispetto ad una delle due coniche fondamentali C_1 C_2 per es. C_2, uno dei punti del gruppo cade in C_1 o C_2 secondo che m è pari o dispari. Allora i punti del gruppo (P) sono due a due conjugati rispetto alle coniche dei gruppi (R_1) ed (R_2). Tutti i punti del gruppo (P) cadono rispettivamente nelle coniche del gruppo (R_2) o (R_1).

Supponiamo finalmente che il punto P_1 sia uno dei punti d'incontro delle due coniche C_1 C_2, allora le polari di P_1 rispetto a C_1 e C_2 ossia p_1 e p_{-1} sono tangenti alle medesime in P_1. Il polo di p_1 rispetto a C_2, ossia P_2, è situato in p_{-1}, la polare p_2 di P_2 rispetto a C_1 passa pel polo di p_{-1} rispetto a C_1, ossia P_{-1}, che è situato su p_1, dunque P_{-1} P_2 sono conjugati rispetto a C_1 e C_2. Il polo P_3 di p_2 rispetto a C_2 è situato sulla polare di P_{-1} rispetto a C_2, ossia p_{-2}, la polare p_3 di P_3 rispetto a C_1 passa pel polo di p_{-2} ossia P_{-2}; dunque P_{-2} P_3 sono conjugati rispetto a tutte e due le coniche C_1 e C_2; seguitando così si trovano le seguenti coppie di punti e rette conjugate rispetto alle coniche C_1 C_2:

$$P_1 P_1\ , \quad P_2 P_{-1}, \ldots P_m P_{-m+1}$$

$$p_1 p_{-1}, \quad p_2 p_{-2}\ , \cdots p_m p_{-m}$$

Le rette del gruppo (p) passano rispettivamente per due punti immediatamente consecutivi del gruppo (P) e formano perciò i lati di un poligono aperto, che ha per vertici i punti di (P). Esso è dunque polare reciproco di sè stesso rispetto alle coniche (R_1) e (R_2).

Sia data ora una tangente p_1 comune di C_1 C_2, i punti di contatto sono P_1 e P_2. La polare p—1 di P_1 rispetto a C_1 passa per P_2 e contiene P_3, perchè p_2 passa per P_1, onde si vede, che rispetto a C_1 C_2 sono conjugati gli elementi delle coppie

$$P_1P_2\ , \quad P_3P_{-2}\ , \quad P_4P_{-3}\ .\ .\ .\ P_mP_{-m+1}$$

$$p_1p_1 \quad p_2p_{-1} \quad p_3p_{-2}\ .\ .\ .\ p_mp_{-m+1}.$$

Anche in questo caso abbiamo un poligono reciproco di sè stesso rispetto alle due coniche C_1 C_2. È facile di vedere pel teorema IX, che un tale poligono non può esser dato che da un punto d'incontro di C_1 C_2 oppure da una delle loro tangenti comuni.

Teorema X. Se il punto P_1 è uno dei punti d'incontro, oppure uno dei punti di contatto di una tangente comune a due delle coniche C_1 C_2 dei gruppi (R_1) e (R_2), i punti del gruppo (P) formano un poligono aperto polare reciproco di sè stesso rispetto alle coniche di (R_1) ed (R_2). E se in un gruppo projettivo (P) i due punti $P_1 P_m$ sono conjugati rispetto alle due coniche $C_1 C_2$, uno dei punti del gruppo cade in uno dei punti d'incontro di esse, se m è dispari; invece è un punto di contatto di una delle loro tangenti se m è pari.

Per l'ultima parte del teorema basta osservare che per m pari sono conjugati rispetto a C_1 C_2 gli elementi delle coppie

$$P_1 P_m\,,\quad P_2 P_{m-1}\ \ldots\ P_r P_{m-r+1}$$

$$p_1 p_{m-1}\,,\ p_2 p_{m-2}\ \ldots\ p_r p_{m-r}$$

3. Abbiamo visto al n. 1, che le coordinate dei punti consecutivi di P_1 si mettono sotto la forma:

$$\mu x_i = a_i^m y_i \tag{1}$$

ove m è intero qualunque. I punti del gruppo (P) sono situati in una curva trascendente W, che si ottiene eliminando μ ed n dalle 3 equazioni (1). La sua equazione è

$$\log\frac{x_1}{y_1}\log\frac{a_2}{a_3} + \log\frac{x_2}{y_2}\log\frac{a_3}{a_1} + \log\frac{x_3}{y_3}\log\frac{a_1}{a_2} = 0 \tag{2}$$

ove

$$\log\frac{a_2}{a_3} + \log\frac{a_3}{a_1} + \log\frac{a_1}{a_2} = 0 \tag{3}$$

La (2) si pone anche sotto la forma:

$$\left(\frac{x_1}{y_1}\right)^{\log\frac{a_2}{a_3}}\left(\frac{x_2}{y_2}\right)^{\log\frac{a_3}{a_1}}\left(\frac{x_3}{y_3}\right)^{\log\frac{a_1}{a_2}} = 1. \tag{2^a}$$

È evidente però che i coefficenti $a_1\, a_2\, a_3$ devono essere (+), perchè altrimenti i punti del gruppo (P) sarebbero situati in due curve W. *Supporremo sempre* $a_1\, a_2\, a_3$ *positivi.* La (2) può essere anche algebrica basta che

$$\log\frac{a_2}{a_3} : \log\frac{a_3}{a_1} : \log\frac{a_1}{a_2} = n_1 : n_2 : n_3$$

ove $n_1\, n_2\, n_3$ sono dei numeri razionali qualunque.

Queste curve trascendenti sono state accennate da Battaglini e da Clebsch e Gordan nei loro lavori [1], però furono elegantemente e distesamente studiate da Klein e Lie [2], senza però metterle in relazione coi gruppi di coniche, che stiamo qui studiando. La curva W di un gruppo (P), ha la medesima polare reciproca non solamente rispetto alle curve C_1 C_2, ma anche rispetto a tutte le coniche di (R_1) ed (R_2), come risulta dai teoremi I e VIII. Risulta dall'equazione della W, che ogni suo punto dà luogo ad un gruppo inscritto in essa, ciò che risulta pure dall'avere la W una sola

[1] l. c.

[2] Math. Ann. vol. IV *Ueber djenigen Ebenen Curven, welche durch ein geschlossenes System von einfach unendlich viele verlauschbaren Transformationen in sich übergehen.*

polare reciproca rispetto alle coniche di (R_1) ed (R_2). Ogni sua tangente dà pure luogo ad un gruppo circoscritto ad essa, onde le curve W in coordinate di rette si mettono pure sotto la stessa forma (2) o (2^a).

Per un punto d'incontro di W con una delle coniche di (R_1) (R_2) si ottiene un gruppo di punti situati sulla W e conjugati rispettivamente due a due rispetto a quelle coniche (Teor. XI), proprietà che ha luogo anche per ogni tangente comune di W e una di quelle coniche. È chiaro, che due W non possono incontrarsi in nessun punto, nè avere nessuna tangente comune all' infuori dei vertici e dei lati del triangolo fondamentale. Una curva W passa per due determinati vertici del triangolo fondamentale e ivi tocca due lati di esso, tranne quello nel quale sono situati i due vertici. Infatti in generale sarà (—) uno dei log. dei rapporti degli a per es. $\log.\frac{a_1}{a_2}$ e, allora la W si pone sotto la forma:

$$\left(\frac{x_1}{y_1}\right)^{\log\frac{a_2}{a_3}}\left(\frac{x_2}{y_2}\right)^{\log\frac{a_2}{a_1}}=\left(\frac{x_3}{y_3}\right)^{\log\frac{a_2}{a_3}+\log\frac{a_3}{a_1}} \qquad (2^b)$$

Ciò fa vedere, che la curva passa pei vertici $x_1=x_3=0$ $x_2=x_3=0$ e ivi tocca i lati $x_1=0$ $x_2=0$.

Se una curva W tocca una delle coniche di (R_1) ed (R_2) per es. C_1, la tangente comune nel punto di contatto dovendo toccare la polare reciproca di W, le due curve coincidono e perciò la W è polare reciproca di sè stessa rispetto alle coniche di (R_1) ed (R_2).

Ponendo per maggior semplicità $x_3=y_3=a_3=1$, $x_1=x$, $x_2=y$, $y_1=x'$ $y_2=y'$ l'equazione della W diventa

$$\left(\frac{x}{x'}\right)^{\log a_2}=\left(\frac{y}{y'}\right)^{\log a_1} \qquad (2^c)$$

da cui

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}\,\frac{\log a_2}{\log a_1}. \qquad (3)$$

Se ora consideriamo la trasformazione infinitesima

$$\begin{aligned} x&=x'+x'.\log\ a_1.dm\\ y&=y'+y'.\log\ a_2.dm \end{aligned} \qquad (4)$$

mediante la quale dal punto $x'\,y'$ si passa al punto $x'+dx'$ $y'+dy'$, differenziando la (4) si ha:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\log a_2}{\log a_1}\,\frac{y}{x}$$

che è precisamente l'equazione differenziale delle curve W; dunque le curve W si trasformano in sè stesse per la trasformazione infinitesima (4) (¹). Dunque da un punto della W si puo passare ad un altro punto qualunque di W, e ripetendo più volte la trasformazione infinitesima (4) si ottiene una trasformazione finita del sistema

$$\begin{aligned} x&=a_1{}^m\,x'\\ y&=a_2{}^m\,y' \end{aligned} \qquad (5)$$

(¹) Klein e Lie, l. c.

In queste diverse trasformazioni finite del sistema (5) variando a_1 e a_2, varieranno anche i sistemi di coniche (R_1) ed (R_2); ossia stabiliti due punti P_1 P_2 qualunque di W come punti immediatamente consecutivi, essi determinano le coniche di (R_1) ed (R_2).

Consideriamo una di queste coppie di gruppi (R_1) ed (R_2). Abbiamo visto che se un punto P_1 è situato in W tutti i punti del gruppo (P) sono situati su di essa. Sappiamo anche che i lati e i vertici del triangolo fondamentale (Teor. IV) sono altrettante curve W; da cui si deduce, che le coniche delle infinite coppie di gruppi (R_1) ed (R_2) hanno lo stesso triangolo fondamentale come conjugato.

Una retta qualunque p_1 taglia le curve W in un certo numero di punti $A_1 B_1 C_1 \ldots$ e le rette consecutive di essa, taglieranno le stesse curve W, nei punti

$$A_2 B_2 C_2 \ldots, \quad A_3 B_3 C_3 \ldots, \quad A_m B_m C_m \ldots, \text{ e si avrà}$$

$$(A_1 B_1 C_1 \ldots) \barwedge (A_2 B_2 C_2 \ldots) \barwedge (A_3\, B_3\, C_3 \ldots) \barwedge (A_m B_m C_m \ldots)$$

Analogamente si conducano da un punto P_1 le tangenti alle curve W (compresi i vertici del triangolo fondamentale) $a_1 b_1 c_1 \ldots$, e si faccia la stessa cosa pei punti consecutivi di P_1 si avrà:

$$(a_1 b_1 c_1 \ldots) \barwedge (a_2 b_2 c_2 \ldots) \barwedge (a_3 b_3 c_2 \ldots) \barwedge \ldots \barwedge (a_m b_m c_m \ldots)$$

Se per retta p_1 si sceglie una tangente ad una curva W, il cui punto di contatto sia Q_1 e siano $A_1 B_1 C_1$ i punti d'incontro di p_1 con i tre lati del triangolo fondamentale, essendo le rette consecutive di p_1 pure tangenti a W nei punti consecutivi di Q_1, tagliano i lati del triangolo fondamentale nei punti consecutivi di $A_1 B_1 C_1$, onde si avrà:

$$(Q_1 A_1 B_1 C_1) = (Q_2 A_2 B_2 C_2) = \ldots = (Q_m A_m R_m C_m) \tag{6}$$

Analogamente se dal punto $Q_1, Q_2 \ldots Q_m$ projettiamo i vertici del triangolo fondamentale mediante le rette $a_1 b_1 c_1, a_2 b_2 c_2 \ldots a_m b_m c_m$ si avrà;

$$(p_1 a_1 b_1 c_1) = (p_2 a_2 b_2 c_2) = \ldots = (p_m a_m b_m c_m) \tag{7}$$

Ma abbiamo visto, che due punti qualunque di W possono essere considerati come punti immediatamente consecutivi di un gruppo projettivo rispetto ad una coppia di gruppi di coniche (R_1) ed (R_2), dunque le relazioni (6) e (7) sussistono ancora quando $Q_1\, Q_m$ sono due punti qualunque di W.

Se la curva W è algebrica, si può mettere sotto la forma

$$\left(\frac{x_1}{y_1}\right)^{n_1} \left(\frac{x_2}{y_2}\right)^{n_2} = \left(\frac{x_3}{y_3}\right)^{n_1+n_2} \tag{2^d}$$

supposto n_1 ed n_2 (+). I punti di questa curva si possono esprimere in funzione di due parametri λ e μ nella seguente maniera

$$\rho x_1 = \mu^{n_1+n_2} \quad \rho x_2 = \lambda^{n_1+n_2} \quad \rho x_3 = \mu^{n_1} \lambda^{n_2}$$

I punti d'incontro di una retta $u_x = 0$ con la curva sono dati dall'equazione:

$$u_1 \mu^{n_1+n_2} + u_2 \lambda^{n_1+n_2} + u_3 \mu^{n_1} \lambda^{n_2} = 0$$

Differenziando rispetto a μ e a λ si trova la curva in coordinate di rette, che è precisamente della forma (2^d) cioè della classe $n_1 + n_2$. Ora riassumendo si ha:

Teorema XI. I punti di un gruppo (P) sono situati su una curva trascendente W, che ha la stessa polare reciproca rispetto a tutte le coniche dei gruppi (R_1) ed (R_2) individuate da C_1 e C_2. Un suo punto qualunque P o una sua tangente q dà luogo ad un gruppo (P) inscritto in essa o un gruppo (q) circoscritto ad essa. Essa passa per due dei vertici del triangolo fondamentale e vi tocca i due lati di esso, che non contengono tutti e due i vertici. In essi ha la curva W tutte le sue singolarità, di punti nei due vertici, di tangenti nei due lati.

Teorema XII. Ci sono infinite coppie di gruppi di coniche (R_1) ed (R_2) rispetto alle quali una curva W, ha le stesse proprietà. Due punti qualunque o due tangenti qualunque di W possono essere risguardate come elementi immediatamente consecutivi rispetto ad una coppia (R_1) ed (R_2). Le coniche di tutte le coppie (R_1) ed (R_2) hanno lo stesso triangolo conjugato fondamentale.

Teorema XIII. Per un punto comune di una curva W con una conica di una coppia (R_1) (R_2), si ottiene un gruppo projettivo di punti inscritto in W, i cui punti sono due a due rispettivamente conjugati rispetto alle coniche di (R_1) ed (R_2).

Teorema XIV. I lati ed i vertici del triangolo conjugato fondamentale sono altrettante curve W.

Teorema XV. Se la curva W tocca una conica di (R_1) e (R_2) essa è reciproca di sè stessa rispetto alle coniche di (R_1) ed (R_2).

Teorema XVI. Due curve qualunque W non possono incontrarsi in nessun punto all'infuori dei due vertici del triangolo fondamentale e non possono avere altre tangenti comuni all'infuori dei lati di esso.

Teorema XVII. Il punto di contatto Q_1 di una tangente qualunque di una curva W e i tre punti d'incontro $A_1 B_1 C_1$ coi tre lati del triangolo fondamentale formano un rapporto anarmonico costante. Le rette $a_1 b_1 c_1$ che congiungono il punto Q_1 con i vertici del triangolo fondamentale e la tangente p_1 in Q_1, formano un rapporto anarmonico costante, qualunque sia Q_1.

Teorema XVIII. Alle curve W appartengono quelle curve algebriche d'ordine n, che hanno in un vertice del triangolo fondamentale un punto $(n-1)^{plo}$ con $(n-1)$ tangente coincidenti e nell'altro vertice la singolarità correlativa. A queste curve appartiene la curva del 3° ordine con una cuspide. Ordine e classe di queste curve sono eguali.

Osservo che non più di $\frac{n(n+3)}{2}$ punti immediatamente consecutivi di un gruppo projettivo (P) possono essere situati sopra una curva algebrica d'ordine n; infatti se la curva ne avesse uno di più conterrebbe tutti i punti del gruppo. Però si possono studiare le posizioni speciali delle due coniche C_1 C_2 affinchè $\frac{n(n+3)}{2}+1$ punti non immediatamente consecutivi del gruppo appartengano ad una curva d'ordine n (¹).

(¹) Vedi Clebsch e Gordan l. c.

Nel caso che la W sia algebrica ponendo $a_3 = 1$ $\log a_1 = -n_2$ $\log a_2 = n_1$ la conica C_2 si mette sotto la seguente forma:

$$e^{-n_2} x_1^2 + e^{n_1} x_2^2 + x_3^2 = 0 \tag{1}$$

4. Data la C_1 vogliamo ora determinare la C_2, in modo che il punto P_n di (P) cada in P. Si avrà

$$a_1^n y_i = y_i \qquad a_2^n y_i = y^i \; a_3 = 1$$

ossia

$$a_1 = \sqrt[n]{1} \qquad a_2 = \sqrt[n]{1}$$

I due coefficenti arbitrarî della C_2 cercata, sono adunque due radici n^{eme} dell'unità. Allora è chiaro che non solamente P_n ma anche P_{-n}, cade in P, perchè si ha pure:

$$a_1^{-n} = 1 \qquad a_2^{-n} = 1$$

oltre a ciò si vede, che questo ha luogo per qualunque punto del piano e per qualunque retta.

L'equazione della C_2 sarà della forma:

$$r^s x_1^2 + r^p x_2^2, + x_3^2 = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

ove r è una radice n^{ema} primitiva dell'unità. Oppure:

$$e^{\frac{2\mu_1\pi}{n} i} x_1^2 + e^{\frac{2\mu_2\pi}{n} i} x_2^2 + x_3^2 = 0 \qquad (\mu = 0\,,\, 1 \ldots n-1) \tag{1^a}$$

Le coniche C_2, che si ottengono in tal maniera sono n^2.

Tra queste n^2 coniche è compresa anche la C_1, infatti basta porre $a_1 = a_2 = 1$. Queste n^2 coniche formano un *ciclo* S_n^2.

Date due coniche del ciclo S_n^2 per es.

$$r^s x_1^2 + r^p x_2^2 + x_3^2 = 0 \tag{2}$$

$$r^{s_1} x_1^2 + r^{p_1} x^2 + x_3^2 = 0 \tag{3}$$

e operando le due trasformazioni polari rispetto ad un punto qualunque P, si vede, per le proprietà delle radici dell'unità, che il punto P_n cade in P. In tal caso i punti del gruppo $(P)^n$ (') formano un *ciclo* projettivo.

Se n non è primo cioè $= a. b. c. \ldots m$, ove $a, b, c, \ldots m$ sono primi, allora nel ciclo S_n^2 sono compresi quelli corrispondenti ad $a, b, c, \ldots m$, e scelto a per es. tutte le coniche di S_n^2 si separano in $b. c. \ldots m$ sistemi di cicli S_a^2. Noi discuteremo solamente il caso in cui n è primo, potendosi ricavare da esso il caso in cui n non è primo.

Teorema XIX. Se è data una conica C_1 ce n'è altre n^2-1, le quali due a due sono situate in tale posizione, che se di un punto P si trova il gruppo corrispondente (P) rispetto ad esse, esso si compone di n soli punti, che formano un ciclo projettivo $(P)^n$. A questo ciclo corrisponde un ciclo projettivo di n rette $(p)^n$, che è polare reciproco del primo rispetto alle due coniche.

(') n indica il numero dei punti contenuti in (P).

Queste n^2 coniche formano un ciclo S_n^2 ed hanno lo stesso triangolo conjugato comune.

Teorema XX. Se $n=a.b.c...m$ ove $a, b, c...m$ sono primi il ciclo S_n^2 si scompone per es. in $b. c... m$ cicli S_a^2.

5. Dall'equazioni delle n^2 coniche del ciclo S_n^2 si scorge che esse tagliano un lato qualunque del triangolo fondamentale in n sole coppie di punti.

Teorema XXI. Le n^2 coniche di un ciclo S_n^2, tagliano uno qualunque dei lati del triangolo fondamentale in n coppie di punti; in una di esse si toccano n coniche del ciclo. Queste n coniche formano un'ennupla di 1ª specie. — Di queste ce n'è $3n$ in tutto il ciclo S_n^2.

Due coniche del ciclo S_n^2 o si toccano in una coppia di punti di uno dei lati del triangolo fondamentale, oppure tagliano i lati di esso in coppie di punti differenti. Tali sono nel 1° caso le due coniche:

$$r^s x_1^2 + r^p x_2^2 + x_3^2 = 0 \qquad (1)$$

$$r^{s_1} x_1^2 + r^p x_2^2 + x_3^2 = 0 \qquad (2)$$

e nel 2° caso

$$r^s x_1^2 + r^p x_2^2 + x_3^2 = 0 \qquad (3)$$

$$r^{s+s_1} x_1^2 + r^{p+p_1} x_2^2 + x_3^2 = 0 \qquad (4)$$

Consideriamo le due coniche (1) e (2)

Il ciclo $(P)^n$ corrispondente ad un punto $P(y_1 y_2 y_3)$ è situato sopra una retta passante pel punto $x_2 = x_3 = 0$. Così data una retta p, tutte le sue consecutive, che formano il ciclo $(p)^n$, s'incontrano nel lato $x_1=0$. Le coniche (1) (2) si toccano in due punti del lato $x_1=0$, esse determinano adunque un'ennupla di 1ª specie. Se della (2) troviamo la polare reciproca rispetto alla (1) otteniamo la conica

$$r^{2s-s_1} x_1^2 + r^p x_2^2 + x_3^2 = 0$$

ossia una conica del ciclo S_n^2 e della stessa ennupla, quindi i gruppi (R_1) ed (R_2) del Teorema VII coincidono con l'ennupla stessa.

Teorema XXII. La polare reciproca di una conica di un'ennupla di 1ª specie rispetto ad un'altra conica dell'ennupla appartiene all'ennupla stessa. I gruppi (R_1) ed (R_2) del Teorema VII, generati da due coniche dell'ennupla, coincidono con essa stessa.

Teorema XXIII. Il ciclo $(P)^n$ corrispondente ad un punto P rispetto a due coniche qualunque di un'ennupla di 1ª specie è situato in una retta, passante per il vertice opposto al lato del triangolo fondamentale, ove si toccano le coniche dell'ennupla.— Esso ha lo stesso ciclo $(p)^n$ polare reciproco rispetto a tutte le n coniche dell'ennupla.

6. Supponiamo ora date le due coniche

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \qquad (1)$$

$$r^{s_1} x_1^2 + r^{p_1} x_2^2 + x_3^2 = 0$$

le quali incontrano i lati del triangolo fondamentale in punti differenti. La polare reciproca di (1) rispetto a (2) cioè

$$r^{s_2} x_1^2 + r^{p_2} x_2^2 + x_3^2 = 0 \qquad (3)$$

appartiene al ciclo S_n^2 e taglia i lati del triangolo fondamentale in punti differenti da quelli, in cui sono tagliati da (1) e (2). Continuando a trovare le polari reciproche d'una qualunque delle coniche (1) (2) (3) rispetto alle altre e alle nuove ottenute, è chiaro che si ottengono n coniche, che tagliano i lati del triangolo fondamentale in coppie di punti differenti e che costituiscono un ciclo o *ennupla di* 2ª *specie.* I gruppi (R_1) (R_2) generati da (1) (2) coincidono con l'ennupla stessa. Data una conica per es. la (1), per ottenere da essa un'ennupla di 2ª specie basta moltiplicare rispettivamente x_1^2 e x_2^2 per due radici n^{me} dell'unità per es. r^{s_1} e r^{p_1}. Dalla nuova conica (2) si passa alla (3), o moltiplicando x_1^2 x_2^2 di (1) per i quadrati di r^{s_1} e r^{p_1}, oppure moltiplicando x_1^2 e x_2^2 di (2) per r^{s_1}, r^{p_1}. Così le n^2 coniche del ciclo S_n^2, formano un sistema di n ennuple di 2ª specie, $(A)^n(B)^n(C)^n \ldots\ldots (N)^n$. Ma cambiando r^{s_1} ed r^{p_1} cambia pure il sistema. Infatti prendendo per es. come moltiplicatori r^{s_1} ed r^{p_2} da (1), si deduce la conica

$$r^{s_1} x_1^2 + r^{p_2} x_2^2 + x_3^2 = 0 \tag{4}$$

la quale apparteneva nel precedente sistema $(A)^n \ldots\ldots (N)^n$ ad un'ennupla diversa da quella a cui apparteneva la conica (1). Due coniche qualunque, che non appartengono ad un'ennupla di 1ª specie, ossia che non si toccano, dànno luogo ad un'ennupla di 2ª specie; per es. (1) e (2) determinano un'ennupla di 2ª specie. I moltiplicatori r^{s_1} ed r^{p_1} si ottengono dividendo rispettivamente i coefficenti di x_1^2 e x_2^2. Una conica qualunque per es. (1) appartiene a 3 ennuple di 1ª specie e perciò con le 3 $(n-1)$ coniche di esse non può generare delle ennuple di 2ª specie.

Dunque la (1) con le $n^2-1-3\,(n-1)=(n-1)\,(n-2)$ coniche rimanenti, determina $(n-2)$ ennuple di 2ª specie. Dunque:

Teorema XXIV. Le n^2 coniche del ciclo S_n^2 si dispongono in $(n-2)$ sistemi di ennuple di 2ª specie $(A)^n(B)^n \ldots (N)^n$, che non hanno nessuna conica comune. Le coniche di una di queste ennuple incontrano i lati del triangolo fondamentale in n coppie di punti distinti. La polare reciproca di una conica di un'ennupla di 2ª specie rispetto ad una conica della medesima è pure una conica dell'ennupla. I gruppi (R_1) e (R_2) generati da due coniche di un'ennupla di 2ª specie coincidono con l'ennupla stessa.

7. Siano date due coniche

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \tag{1}$$

$$r^{s_1} x_1^2 + r^{p_1} x_2^2 + x_3^2 = 0 \tag{2}$$

che determinano un'ennupla di 2ª specie.

Il ciclo projettivo $(P)^n$ di un punto P $(y_1 y_2 y_3)$ rispetto alle due coniche ha lo stesso ciclo polare reciproco $(p)^n$ rispetto alle n coniche dell'ennupla. I punti del ciclo $(P)^n$ sono situati sopra una curva W algebrica. Infatti la (2) si può mettere anche sotto la forma

$$e^{\frac{-2\mu_1\pi}{n}i} x_1^2 + e^{\frac{2\mu_2\pi}{n}i} x_2^2 + x_3^2 = 0$$

quindi la curva W descritta dal punto P si mette sotto la forma

$$(3) \qquad \left(\frac{x_1}{y_1}\right)^{\mu_2}\left(\frac{x_2}{y_2}\right)^{\mu_1}=\left(\frac{x_3}{y_3}\right)^{\mu_2+\mu_1} \qquad (\text{N.}^\circ\ 3\ (2^d))$$

Ora ponendo $\mu_1=-\mu_2$ la W diventa una retta, che passa per il punto $x_1=x_2=0$ come già si sa. Se

$$\mu_1=\mu_2$$

la W è allora una conica ([1]). Se $\mu_1=1$ $\mu_2=2$ allora si ha una curva del 3° ordine con una cuspide ecc. Se consideriamo la curva algebrica (3), essa viene generata tanto da gruppi projettivi aperti, come anche da cicli projettivi di n punti. Nel primo caso basta considerare le due coniche

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=0$$

$$e^{-\mu_1}x_1^2+e^{\mu_2}x_2^2+x_3^2=0.$$

Se del punto $y_1y_2y_3$ costruiamo il gruppo (P) corrispondente rispetto a queste due coniche, esso è inscritto nella (3). Nel secondo caso basta considerare le due coniche

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=0 \quad , \quad e^{\frac{-2\pi\mu_1}{n}i}x_1^2+e^{\frac{2\pi\mu_2}{n}i}x_2^2+x_3^2=0$$

ove $n>\mu_1$ e $>\mu_2$.

Teorema XXV. Il ciclo projettivo $(P)^n$ corrispondente ad un punto P rispetto ad un' ennupla di 2ª specie è situato sopra una curva algebrica W. — Il ciclo $(P)^n$ ha lo stesso ciclo projettivo $(p)^n$ polare reciproco rispetto a tutte le coniche dell'ennupla. La curva W ha la stessa polare reciproca rispetto a tutte le coniche dell'ennupla. — Essa può essere anche una conica.

Teorema XXVI. In una curva qualunque W algebrica sono inscritti e circoscritti dei gruppi projettivi di punti e di rette aperti e chiusi. Per esempio in una curva del 3° ordine con una cuspide si può inscrivere dei cicli projettivi da 4 ad n punti.

Se per un certo numero di cicli $(P)^n(Q)^n$ ecc. projettivi di punti rispetto ad una ennupla di 1ª o 2ª specie si può far passare una sola curva d'ordine m è chiaro che ogni punto di questa curva dà luogo ad un ciclo projettivo descritto in essa, perchè essa ha la stessa polare reciproca rispetto alle coniche dell'ennupla. Dunque:

Teorema XXVII. Se per un certo numero di cicli projettivi rispetto ad un'ennupla di 1ª o 2ª specie passa una sola curva d'ordine n, essa ha la medesima polare reciproca rispetto a tutte le n coniche dell'ennupla ed ogni suo punto od ogni sua tangente dà luogo ad un ciclo inscritto in essa o circoscritto ad essa.

8. Supponiamo ora che le n^2 coniche di $S_n{}^2$ siano disposte in un dato ordine e di un punto $P(y_1y_2y_3)$ si costruisca la polare rispetto alla 1ª, di questa il polo rispetto alla 2ª, di questo la polare rispetto alla 3ª e così di seguito; si ottengono due

([1]) Il prof. Lüroth asserisce nel vol. XIII Math. Annalen che i punti di un ciclo projettivo reale sono sempre in una conica, mentre per i cicli projettivi imaginarî, come qui si vede, si ottengono delle curve W algebriche cicli, uno di n^2 punti $(P)^{n^2}$ ed uno di n^2 rette $(p)^{n^2}$, le cui coordinate sono della forma

$$r^s y_1, \quad r^p y_2 \quad y_3$$

Questi due cicli sono indipendenti, come si vede, dall'ordine delle n^2 coniche, Dunque:

Teorema XXVIII. Se di un punto P si costruisce la polare rispetto alla 1ª delle n^2 coniche di S_n^2, disposte in un dato ordine, di questa il polo rispetto alla 2ª, di questo la polare rispetto alla 3ª e così via si ottengono due cicli, uno di n^2 punti $(P)^{n^2}$ e l'altro di n^2 rette $(p)^{n^2}$, che sono polari reciproci rispetto alle n^2 coniche del ciclo S_n^2.

Teorema XXIX. Se si considera un numero $2r+1$ di coniche del ciclo S_n^2 e di un punto P si trova la polare reciproca rispetto alla 1ª di esse, disposte in un dato ordine, di questa il polo rispetto alla 2ª e così via, si ottengono due cicli, uno di $2r+1$ punti e l'altro di $2r+1$ rette, i quali però mutano col mutare l'ordine delle $2r+1$ coniche.

9. Consideriamo le n ennuple di 1ª specie formate con le n^2 coniche del ciclo S_n^2, le cui coniche si toccano in n coppie di punti di uno dei lati del triangolo fondamentale. Gli n^2 punti del ciclo $(P)^{n^2}$ si separano in n cicli projettivi $(P)^n$ rispetto ad una qualunque di quelle ennuple, i quali sono situati sopra n rette passanti per il vertice opposto a quel lato. Il ciclo polare reciproco $(p)^{n^2}$ si scompone ancora esso in n cicli, le cui rette s'incontrano in un punto di quel lato. Ciascuno degli n cicli di $(P)^{n^2}$ evidentemente ha per polari reciproci rispetto alle n ennuple di 1ª specie considerate gli n cicli di $(p)^{n^2}$. (Teorema XXIII). Dunque:

Teorema XXX. Gli n^2 punti di un ciclo $(P)^{n^2}$ sono situati n ad n in n rette passanti per uno qualunque dei vertici del triangolo fondamentale. Gli n punti sopra una tale retta formano un ciclo projettivo. Gli n^2 punti sono l'intersezione completa di due curve dell'ordine n.

Consideriamo ora un sistema di n ennuple di 2ª specie $(A)^n(B)^n(C)^n\ldots.(N)^n$; il ciclo di n^2 punti $(P)^{n^2}$ si scompone in n cicli projettivi $(P_a)^n(P_b)^n\ldots.(P_n)^n$ rispetto ad una qualunque delle n ennuple, che sono situati rispettivamente sopra altrettante curve W algebriche. A questi corrispondono i cicli polari projettivi $(p_a)^n (p_b)^n\ldots.(p_n)^n$, che risultano dal ciclo $(p)^{n^2}$. È chiaro che uno qualunque dei cicli di punti per es. $(P_a)^n$ ha rispetto alle n ennuple del sistema come polari reciproci rispettivamente $(p_a)^n(p_b)^n\ldots.(p_n)^n$; quindi le curve W, determinate da $(P_a)^n, (P_b)^n\ldots(P_n)^n$ sono dello stesso ordine e della stessa classe. Dunque:

Teorema XXXI. Il ciclo di n^2 punti $(P)^{n^2}$ si scompone in n cicli projettivi $(P_a)^n$ $(P_b)^n\ldots.(P_n)^n$ rispetto alle n ennuple di 2ª specie $(A)^n$ $(B)^n\ldots.(N)^n$ di un dato sistema del ciclo S_n^2 (Teor. XXIV), i quali sono situati sopra altrettante curve W algebriche del medesimo ordine e medesima classe. A questi cicli corrispondono per polari reciproci, i cicli projettivi $(p_a)^n(p_b)^n\ldots..(p_n)^n$ formati con le rette di $(p)^{n^2}$. Un ciclo per es: $(P_a)^n$ ha per polari reciproci rispetto alle n ennuple del sistema i cicli $(p_a)^n, (p_b)^n, \ldots (p_n)^n$.

Teorema XXXII. Ogni punto od ogni tangente delle curve A, le cui equazioni rispetto al triangolo fondamentale di S_n^2 non contengono che le n^{me} o multipli delle n^{me} potenze delle variabili dà luogo ad un ciclo di n^2 punti inscritto in esse o di n^2 rette circoscritto ad esse. Una curva A ha la stessa polare reciproca rispetto alle coniche del ciclo S_n^2. E viceversa data una curva A, vengono ad essa coordinati infiniti cicli di n^2 coniche S_n^2, che hanno lo stesso triangolo conjugato, e rispetto alle quali la A, ha la stessa polare reciproca.

Per dimostrare l' ultima parte del teorema consideriamo un ciclo di n^2 punti $(P)^{n^2}$, le cui coordinate sono della forma $r^s y_1, r^p y_2, y_3$. Essi formano non solo un ciclo di n^2 punti rispetto al ciclo S_n^2 dato dalla conica $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$, che abbiamo sin qui considerato, ma anche rispetto a quelli determinati da qualunque conica della forma:

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 = 0 .$$

Se tiriamo una retta p qualunque, essa incontrerà una o più curve A, in un certo numero di punti (XY Z...) le n^2-1 rette del ciclo $(p)^{n^2}$ taglieranno le stesse curve A nei punti $X_1\, Y_1\, Z_1 \ldots$, $X_2\, Y_2\, Z_2 \ldots$ ecc. che formano coi primi i cicli $(X)^{n^2}\, (Y)^{n^2}\, (Z)^{n^2}$ ecc. Ora si ha:

$$(X\,Y\,Z \ldots) \barwedge (X_1\, Y_1\, Z_1 \ldots) \barwedge \ldots \barwedge (X_{n^2}\, Y_{n^2}\, Z_{n^2} \ldots)$$

Infatti due rette qualunque del ciclo $(p)^{n^2}$ appartengono sempre ad un ciclo projettivo $(p)^n$ o rispetto ad un'ennupla di 1ª specie o rispetto ad un'ennupla di 2ª specie. Alla retta p rispetto alle $3n$ ennuple di 1ª specie corrispondono $3n$ cicli projettivi, ove entrano oltre la p, $3\,(n-1)$ rette del ciclo $(p)^{n^2}$. — Rispetto agli $(n-2)$ sistemi di n ennuple di 2ª specie, corrispondono alla p $(n-2)$ cicli projettivi, e siccome in ogni ciclo oltre la p entrano $n-1$ rette del ciclo $(p)^{n^2}$, così la p in tutti questi cicli è unita con $(n-1)\,(n-2)$ rette di $(p)^{n^2}$ e in tutto con

$$3\,(n-1)\,(n-1)\,(n-2) = n^2-1 \quad \text{rette}$$

di $(p)^{n^2}$. c. c. b. d.

Per retta p possiamo pigliare una tangente di una curva A, il cui punto di contatto sia Q, e i cui punti d'incontro coi lati del triangolo fondamentale siano R, S, T. Allora si ha, per quello che si è detto precedentemente,

$$(QRST) = (Q_1R_1S_1T_1) = \ldots\ldots = (Q_{n^2}R_{n^2}S_{n^2}T_{n^2})$$

Analogamente projettando dai punti $Q\, Q_1 \ldots\, Q_{n^2}$ di A i vertici del triangolo fondamentale, mediante le rette $a\, b\, c$, $a_1\, b_1\, c_1$, $a_2\, b_2\, c_2$ ecc. si ha:

$$(a\,b\,c\,p) \ \ (a_1\,b_1\,c_1\,p_1) = \ldots\ldots = (a_{n^2}\,b_{n^2}\,c_{n^2}\,p_{n^2})$$

Teorema XXXII. Il ciclo $(t)^{n^2}$ corrispondente ad una tangente t, di una curva A è circoscritto ad A. Il punto di contatto e i tre punti d'incontro con i lati del triangolo fondamentale formano in ciascuna di queste tangenti un rapporto anarmonico costante. Vale anche la proprietà correlativa.

Teorema XXXIV. Se abbiamo una curva A la cui equazione è della forma

$$x_1^n + x_2^n + x_3^n = 0$$

A questa è coordinato un ciclo di $n^2—1$ curve A, che si mettono sotto la forma

$$r^s x^n + r^p x^n + x_3^n = 0$$

Se di un punto P $(y_1 y_2 y_3)$ troviamo le rette polari rispetto a queste n^2 curve A, esse formano un ciclo $(p)^{n^2}$ di rette rispetto alle n^2 coniche di S_n^2. — Queste rette sono poi anche le polari dei punti di $(P)^{n^2}$ rispetto alle stesse curve A. Ciò non ha luogo solamente per le rette polari dei punti del ciclo $(P)^{n^2}$, ma bensì anche per le polari di un ordine qualunque. Lo studio delle curve A si collega intimamente con quello delle configurazioni da noi finora studiate.

Le trasformazioni lineari che trasformano le curve A in sè stesse, dànno precisamente luogo a queste configurazioni e a quelle che si ottengono scambiando le coordinate $x_1\, x_2\, x_3$ fra loro.

Teorema XXXV. Dato un punto P $(y_1 y_2 y_3)$ scambiando $y_1\, y_2\, y_3$ fra loro si ottengono altri 5 punti, che col primo determinano una conica e formano due triangoli omologici i tre maniere differenti per i centri di coordinate (0 1—1), (1 0—1), (1—1 0).

Casi speciali.

11. Se $n=2$ il ciclo S_n^2 contiene 4 coniche; l'equazioni di esse sono:

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &= 0 \\ -x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &= 0 \\ x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 &= 0 \\ x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

Con esse si possono formare $3n = 6$ coppie di coniche, che si toccano in due punti di un lato del triangolo fondamentale. In tal caso non vi sono ennuple o coppie di 2^a specie, perchè $n—2=0$ (Teor. XXIV). Pel Teorema XXII ciascuna delle 4 coniche è polare reciproca di sè stessa rispetto alle altre tre. — Esse tagliano il lato $x_3=0$ nei punti $\frac{x_1}{x_2}=\pm 1$ e $\frac{x_1}{x_2}=\pm\sqrt{-1}$, queste coppie di punti, dividono armonicamente i vertici del lato $x_3=0$ e si dividono armonicamente fra loro. Ad un punto $P(y_1\, y_2\, y_3)$ corrisponde un ciclo di 4 punti cioè:

$$y_1, y_2, y_3; \quad -y_1, y_2, y_3; \quad y_1, -y_2, y_3; \quad y_1, y_2, -y_3.$$

Dal Teorema XXXII si vede pure che facendo passare una conica per 4 punti di un ciclo (P), essa ha la stessa polare reciproca rispetto alle 4 coniche di S_2^2. Ogni suo punto dà luogo ad un ciclo $(P)^2$ inscritto in essa, e così ogni sua tangente ad un ciclo ad essa circoscritto. Date due coniche qualunque $S_1\, S_2$ e si vuol trovare la conica rispetto alla quale esse sono polari reciproche, si trovano quattro coniche di un ciclo S_2^2, rispetto alle quali $S_1\, S_2$ sono due curve A polari reciproche. Sotto questo punto di vista fu primo Steiner a considerare le 4 coniche di un ciclo S_2^2 nel vol. 32 di Crelle.

Le proprietà di queste coniche si trovano diffusamente studiate nelle stesse lezioni di Steiner pubblicate dallo Schröter [1]. Altri pure se ne sono occupati; le proprietà principali però sono riassunte nelle poche righe antecedenti, oltre che qui consideriamo le proprietà dei cicli di punti $(P)^4$.

12. Il caso in cui $n=3$ presenta molto più interesse del precedente, specialmente per la relazione che esso ha con la curva del 3° ordine. Il ciclo di 9 coniche, che risulta, credo non sia stato studiato ancora da alcuno. Se facciamo $n=3$ il ciclo S_n^2 si riduce ad un ciclo di 9 coniche. Abbiamo $3n=9$ terne di 1ª specie e $n-2=1$ sistema di 3 terne di 2ª specie $(A)^3(B)^3(C)^3$.

Teorema XXXVI. Pel caso $n=3$ il ciclo S_3^2 contiene 9 coniche. Con esse si formano 12 terne, 9 di 1ª specie e 3 di 2ª. Se di una conica di una terna si trova la polare reciproca rispetto ad un'altra della terna, si ottiene la terza conica di essa (Teor. XIX, XXII, XXIV).

Le coniche del ciclo S_3^2, disposte secondo le tre terne di seconda specie sono

$(A)^3$	$(B)^3$	$(C)^3$
$x_1^2+x_2^2+x_3^2=0$	$x_1^2+x_2^2+x_3^2=0$	$r^2x_1^2+x_2^2+x_3^2=0$
$r\,x_1^2+r^2x_2^2+x_3^2=0$	$r\,x_1^2+x_2^2+x_3^2=0$	$x_1^2+r^2x_2^2+x_3^2=0$
$r^2x_1^2+r\,x_2^2+x_3^2=0$	$r^2x_1^2+r^2x_2^2+x_3^2=0$	$r\,x_1^2+r\,x_2^2+x_3^2=0$

Si annullano i due invarianti A_{122}, A_{112} simultanei di due delle coniche di una terna, invarianti che per due forme qualunque ternarie $a_x^2=0$ $u^2_{\alpha'}=0$ si mettono sotto la forma:

$$a_{\alpha'}=0 \qquad a'_\alpha=0 \qquad \text{ove} \qquad \alpha'_i=(a'b')_i,\ \alpha_i=(ab)_i$$

tenendo conto che:

$$1+r+r^2=0$$

Dunque:

Teorema XXXVII. Ci sono infiniti triangoli inscritti e circoscritti ad una qualunque delle tre coniche di una qualunque delle tre terne di 2ª specie, che sono conjugati rispettivamente alle altre due coniche della terna.

Ad un punto P $(y_1y_2y_3)$ corrisponde un ciclo di 9 punti $(P)^9$ che ha lo stesso ciclo polare reciproco $(p)^9$ rispetto alle 9 coniche del ciclo S_3^2. Rispetto alle 9 terne di 1ª specie il ciclo $(P)^9$ si scompone in 9 cicli projettivi di 3 punti, situati rispettivamente in 9 rette, passanti tre a tre per ciascun vertice del triangolo fondamentale. Rispetto alle tre terne $(A)^3$ $(B)^3$ $(C)^3$ si separa invece il ciclo $(P)^9$ in tre cicli $(P_a)^3$ $(P_b)^3$ $(P_c)^3$. Essi sono:

$(P_a)^3$	$(P_b)^3$	$(P_c)^3$
$y_1\ \ y_2\ \ y_3$	$ry_1\ \ y_2\ \ y_3$	$r^2y_1\ \ y_2\ \ y_3$
$ry_1\ \ r^2y_2\ \ y_3$	$y_1\ \ ry_2\ \ y_3$	$y_1\ \ r^2y_2\ \ y_3$
$r^2y_1\ \ ry_2\ \ y_3$	$r^2y_1\ \ r^2y_2\ \ y_3$	$ry_1\ \ ry_2\ \ y_3$

le rette dei cicli $(p_a)^3$ $(p_b)^3$ $(p_c)^3$ hanno le stesse coordinate. Il ciclo $(P_a)^3$ ha rispetto alle tre terne $(A)^3$ $(B)^3$ $(C)^3$ per polari reciproci $(p_a)^3$ $(p_b)^3$ $(p_c)^3$; $(P_b)^3$ invece

[1] Steiner'sche Vorlesungen, *Ueber harmonische Kegelshnitte.*

ha per polari reciproci rispetto alle medesime terne ordinatamente $(p_b)^3$ $(p_c)^3$ $(p_a)^3$ e $(P_c)^3$, $(p_c)^3$ $(p_a)^3$ $(p_b)^3$ (Teorema XXXI). Dalla forma stessa delle coordinate dei punti di una delle terne $(P_a)^3$ $(P_b)^3$ $(P_c)^3$ ed anche dal Teorema XXXI, si vede che i punti di una di esse sono situati su tre coniche, che toccano ordinatamente due lati del triangolo fondamentale nei due vertici del terzo. Dunque:

Teorema XXXVIII. Il ciclo di 9 punti corrispondenti ad un punto 1 sia 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Esso ha lo stesso ciclo polare reciproco rispetto alle 9 coniche del ciclo S_3^2. Esso si scompone in 9 cicli projettivi di 3 punti rispetto alle 9 terne di 1ª specie, situati sopra 9 rette 123, 456, 789; 369, 147, 258; 348, 267, 159; le quali passano rispettivamente tre a tre per i vertici del triangolo fondamentale. Il ciclo $(P)^9$ si scompone pure in tre cicli $(P_a)^3$ $(P_b)^3$ $(P_c)^3$ rispetto alle tre terne $(A)^3$ $(B)^3$ $(C)^3$, cioè 168, 249, 357. Uno qualunque di questi cicli è situato in tre coniche, che toccano rispettivamente due dei lati del triangolo fondamentale nei vertici del terzo.

Abbiamo visto che per un' ennupla di 1ª o 2ª specie i gruppi (R_1) ed (R_2) generati da due coniche C_1 C_2 dell' ennupla coincidono con l' ennupla stessa. Abbiamo visto pure, che scegliendo un punto d'incontro delle due coniche C_1 C_2, il gruppo (P) corrispondente è reciproco di sè stesso rispetto alle due coniche C_1 C_2 (Teor. X); per due coniche qualunque di un' ennupla di 2ª specie si ha invece un poligono di n lati ed n vertici che è polare reciproco di sè stesso rispetto alle coniche dell'ennupla; nel caso $n=3$ si ha:

Teorema XXXIX. Se un punto del ciclo $(P_a)^3$ per es. è uno dei punti d'incontro di due delle coniche di una delle tre terne $(A)^3$ $(B)^3$ $(C)^3$, oppure uno dei punti di contatto di una delle tangenti di esse, esso forma un triangolo reciproco di sè medesimo rispetto alle coniche della terna.

Se il punto P è in uno dei lati del triangolo fondamentale il ciclo di 9 punti si riduce a un ciclo di tre punti, che formano un ciclo projettivo, ossia che formano con uno dei vertici di quel lato un rapporto equianarmonico. Il ciclo così ridotto ha un solo ciclo $(p)^3$ polare reciproco rispetto a tutte le 9 coniche del ciclo S_3^2, dunque:

Teorema XL. Se il punto P è situato in uno dei lati del triangolo fondamentale, il suo ciclo corrispondente $(P)^9$ si riduce a un ciclo projettivo di tre punti $(P)^3$, che formano un rapporto equianarmonico con ciascuno dei vertici del triangolo in quel lato.

Esso ha un ciclo di tre rette $(p)^3$ polare reciproco rispetto a tutte le 9 coniche di S_3^2.

13. Consideriamo i due cicli per es. $(P_a)^3$ e il suo ciclo polare reciproco per es. rispetto alla terna $(A)^3$. Le coordinate dei tre punti del ciclo sono:

$$\begin{array}{ccc} y_1 & y_2 & y_3 \\ r\,y_1 & r^2 y_2 & y_3 \\ r^2 y_1 & r y_2 & y_3 \end{array}$$

e queste sono anche le coordinate delle tre rette del ciclo $(p_a)^3$; ebbene si vede che questi triangoli sono prospettivi in tre maniere differenti e che i tre centri di prospettiva (come anche le tre rette di omologia) formano un ciclo $(Q_a)^3$ projettivo rispetto ad una delle terne di 2ª specie. Ciò si dimostra facilmente anche per via sintetica. Infatti supponiamo che la polare di P_1 rispetto ad una delle coniche di $(A)^3$ sia p_1, di questa il polo rispetto ad una delle altre due sia P_2, di questo la polare rispetto alla 1ª sia p_2, di questa il polo rispetto alla 2ª sia P_3, di questo la polare rispetto alla 1ª sia p_3, di questa il polo rispetto alla 2ª sarà P_1. Chiamo i vertici del triangolo $p_1\,p_2\,p_3$ con $Q_1\,Q_2\,Q_3$. È chiaro che i punti consecutivi di P_1 sono in un dato senso $P_2\,P_3$, nel senso opposto $P_3\,P_2$. Invece Q_1 nel primo senso ha per consecutivi $Q_3\,Q_2$ e nel secondo $Q_1\,Q_3$. Siccome i due triangoli $P_1\,P_2\,P_3$, $p_1\,p_2 p_3$ sono polari reciproci, così le rette $P_1\,Q_1$, $P_2\,Q_2$, $P_3\,Q_3$ passano per un punto O_1. Queste ultime tre rette non sono però consecutive, per quel che si è detto, dunque chiamandole a_1 b_1 c_1 le rette consecutive di esse cioè $a_2\,a_3$, $b_2\,b_3$, $c_2\,c_3$, congiungono due a due i vertici dei due triangoli $P_1\,P_2\,P_3$, $Q_1\,Q_2\,Q_3$, e le rette $a_2\,b_2\,c_2$, $a_3\,b_3\,c_3$ s'incontrano perciò in due punti O_2 e O_3. I punti $O_1\,O_2\,O_3$ evidentemente formano un ciclo $(O_a)^3$ rispetto alle coniche della terna $(A)^3$ e perciò anche a quelle delle altre due $(B)^3$ e $(C)^3$.

Teorema XLI. *Uno dei cicli $(P_a)^3$ $(P_b)^3$ $(P_c)^3$ e uno qualunque dei cicli $(p_a)^3$ $(p_b)^3$ $(p_c)^3$ formano due triangoli omologici in tre maniere differenti e i tre centri di omologia formano un ciclo di tre punti $(O_a)^3$. Analogamente per le tre rette di omologia.*

14. Due cicli qualunque $(P_a)^3$, $(Q_a)^3$, non individuano una conica, perchè essa dovrebbe toccare due dei lati del triangolo fondamentale nei vertici del terzo, ed allora $(Q_a)^3$ per es. non sarebbe più arbitrario. Un ciclo $(R)^3$ situato sopra uno dei lati fondamentali, e i due cicli $(P_a)^3$ $(Q_a)^3$ determinano una sola curva del 3° ordine. Ogni punto M di questa curva pel Teorema XXVIII, dà un ciclo $(M_a)^3$ inscritto in essa; analogamente per ogni sua tangente. La sua equazione dunque rispetto al triangolo fondamentale è della forma:

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 6\,k\,x_1 x_2 x_3 = 0$$

da cui risulta che essa ha nei punti di $(R)^3$ tre punti d'inflessione.

Teorema XLII. *Un ciclo $(R)^3$ situato in un lato del triangolo fondamentale e due cicli qualunque $(P_a)^3$ $(Q_a)^3$ sono situati in una curva del 3° ordine, che ha nei punti $(R)^3$ tre dei suoi flessi.*

Applicazione del caso $n=3$ alla curva del 3° ordine.

15. Sia data una curva C_3 generale del 3° ordine nella forma canonica cioè:

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 6\,k\,x_1 x_2 x_3 = 0.$$

È evidente che a questa curva è coordinato il sistema S'^2_3 di 9 coniche cioè:

$(A)^3$	$(B)^3$	$(C)^3$
$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$	$rx_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$	$r^2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$
$rx_1^2 + r^2x_2^2 + x_3^2 = 0$	$x_1^2 + rx_2^2 + x_3^2 = 0$	$x_1^2 + r^2x_2^2 + x_3^2 = 0$
$r^2x_1^2 + rx_2^2 + x_3^2 = 0$	$r^2x_1^2 + r^2x_2^2 + x_3^2 = 0$	$rx_1^2 + rx_2^2 + x_3^2 = 0.$

Se il punto P $(y_1\,y_2\,y_3)$ è situato sulla curva C_3, ci sono pure situati gli altri due punti del ciclo $(P_a)^3$ ossia ry_1, r^2y_2, y_3; r^2y_1, ry_2, y_3; mentre i 6 punti dei cicli $(P_b)^3(P_c)^3$ cadono fuori della curva. Così ha luogo per ogni tangente di C_3 (Teor. XXVII) l'equazione in coordinate di rette della C_3 non può perciò contenere che le 3^e o multipli delle 3 potenze delle variabili, oppure delle potenze del prodotto delle tre variabili, come si sa benissimo. Il triangolo fondamentale, come si vede, è uno dei trilateri della curva C_3, e si trova perciò la C_3 nelle stesse condizioni di quella del Teorema XLI. Invece del ciclo (1) possiamo considerarne infiniti altri, basta supporre le variabili $x_1^2\, x_2^2\, x_3^2$ dotate di coefficenti a_1, a_2, a_3 del tutto arbitrarî, ma che restano gli stessi per le curve di un medesimo ciclo S_3^2, e che noi abbiamo supposto fin da principio positivi. Il ciclo $(P)^9$, secondo quello che si è detto al n. 10, ha le stesse proprietà rispetto a tutti questi nuovi cicli S_3^2 e così pure la C_3. Per i 3 altri trilateri della C_3 corrispondono al ciclo $S_3'^2$ tre altri cicli analoghi di 9 coniche, prendendo sempre $a_1=a_2=a_3=1$ e così pure rispetto ad un altro ciclo S_3^2 qualunque, mantenendo gli stessi a per i quattro trilateri.

Teorema XLIII. Presa una curva del 3° ordine C_3 qualunque, ci sono tre terne di coniche $(A)^3$ $(B)^3$ $(C)^3$ di un ciclo $S_3'^2$, rispetto alle quali la curva è nelle condizioni del Teorema XLI. Il triangolo fondamentale è un trilatero della curva. Rispetto a ciascun trilatero della curva c'è un sistema doppiamente infinito di questi cicli S_3^2.

Teorema XLIV. Il ciclo $(P)^9$ corrispondente ad un punto P rispetto ad uno qualunque dei cicli S_3^2, che si riferiscono ad un trilatero della curva, si decompone in tre cicli projettivi $(P_a)^3$, $(P_b)^3$, $(P_c)^3$. Se uno dei punti di questi cicli è situato sulla C_3, gli altri due punti del ciclo cadono nella C_3. Le tangenti in questi punti formano un ciclo projettivo di tre rette, rispetto ad una terna qualunque del ciclo S_3^2.

Teorema XLV. Il punto di contatto e i tre punti d'incontro delle tre tangenti di un ciclo, circoscritto alla C_3, con i tre lati del triangolo fondamentale, formano un rapporto anarmonico costante per tutte e tre le tangenti. Analogamente le tangenti in tre punti di un ciclo $(P_a)^3$, inscritto nella C_3, e le tre rette che li congiungono con i tre vertici del triangolo fondamentale, dànno un rapporto anarmonico costante per tutti e tre i punti.

16. Abbiamo visto (Teor. XXXVII) che un ciclo $(P_a)^3$ determina tre coniche, che toccano rispettivamente due dei lati del triangolo fondamentale nei vertici del terzo; una tale conica incontra la C_3 in due cicli $(P_a)^3$, $(Q_a)^3$; perchè dato un punto P comune alla conica ed alla C_3, il ciclo $(P_a)^3$ è situato tanto sulla conica come sulla C_3. Per uno di questi cicli per es. per $(P_a)^3$ passano due altre coniche, che hanno la stessa proprietà, dunque:

Teorema XLVI. Una conica, che tocca due lati del triangolo fondamentale nei vertici del terzo, taglia la C_3 in 6 punti di due cicli projettivi $(P_a)^3$ $(Q_a{}^3)$, rispetto alle terne $(A)^3$ $(B)^3$ $(C)^3$ dei cicli S_3^2, che si riferiscono a quel triangolo. Se la conica tocca la C_3 in un punto, i due cicli $(P_a)^2$ $(Q_a)^3$ coincidono, cioè la conica toccherà la C_3 in tre punti.

Le coniche dei cicli S_3^2, n. 15, sono tutte immaginarie se il triangolo fondamentale è reale. Consideriamo il trilatero della C_3 i cui lati riferiti al trilatero reale sono:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 \quad + x_3 &= x_1' \\ rx_1 + r^2x_2 + x_3 &= x_2' \\ r^2x_1 + \ rx_2 + x_3 &= x_3'. \end{aligned} \tag{1}$$

Tre delle 9 coniche del ciclo $S_3''^2$ corrispondente ad $S_3'^2$ che si riferisce a questo trilatero, formano una terna reale, le altre sono immaginarie. Esse sono:

$$\begin{aligned} x_1^2 + 2x_2\, x_3 &= 0 \\ x_2^2 + 2x_1\, x_3 &= 0 \\ x_3^2 + 2x_1\, x_3 &= 0\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Invece le nove coniche di un altro ciclo S_3^2 corrispondente ad un altro ciclo S_3^2, che si riferisce al 1° trilatero, sono tutte immaginarie. Come ben si vede le coniche (2) toccano rispettivamente due lati del triangolo fondamentale nei vertici del terzo. Per gli altri due trilateri, le cui equazioni rispetto al trilatero reale sono [1]:

$$\begin{aligned} x_1 + \ rx_2 + x_3 &= 0 \qquad & x_1 + r^2x_2 + x_3 &= 0 \\ rx_1 + \ x_2 + x_3 &= 0 \qquad & r^2x_1 + \ x_2 + x_3 &= 0 \\ r^2x_1 + r^2x_2 + x_3 &= 0 \qquad & rx_1 + \ rx_2 + x_3 &= 0 \end{aligned} \tag{3}$$

le 9 coniche dei cicli $S_3'''^2$ $S_3''''^2$ corrispondenti al ciclo $S_3'^2$ sono immaginarie.

Osserviamo pure dall'equazioni dei lati dei tre trilateri riferiti a quello reale, che essi formano un ciclo di rette $(p)^9$ rispetto al primo trilatero. I vertici dei tre trilateri formano invece un ciclo di 9 punti $(Q)^9$ dunque:

Teorema XLVII. I 9 lati di tre trilateri della C_3 formano tre cicli projettivi $(p_c)^3$ $(p_b)^3$ $(p_a)^3$ di un ciclo $(p)^9$, e i loro vertici formano tre cicli $(Q_c)^3$ $(Q_b)^3$ $(Q_a)^3$ di un ciclo $(Q)^9$ rispetto ai cicli S_3^2, che si riferiscono al 4° trilatero.

17. Rispetto alle coniche delle tre terne $(A)^3$ $(B)^3$ $(C)^3$ del ciclo $S_3'^2$ ha la curva C_3 tre curve polari reciproche. Infatti ad un ciclo $(P_a)^3$ inscritto in C_3 corrispondono tre cicli $(p_c)^3$, $(p_b)^3$, $(p_a)^3$, polari reciproci rispetto alle coniche delle tre terne. I tre punti d'inflessione di C_3 sopra uno dei lati del triangolo fondamentale formano un ciclo $(R)^3$ (Teor. XL), e questo ha per polare reciproco rispetto a tutte le coniche di un ciclo S_3^2 un ciclo $(r)^3$; se questo ciclo è $S_3'^2$, le rette del ciclo $(r)^3$ sono le tre rette armoniche dei tre flessi; onde le tre curve reciproche di C_3 rispetto alle coniche del ciclo $S_3'^2$, toccano le 9 rette armoniche dei 9 flessi di C_3. Analogamente per i cicli $S_3''^3$ $S_3'''^2$ $S_3''''^2$, dunque:

Teorema XLVIII. La figura dei 9 punti d'inflessione della C_3 e quella delle 9 rette armoniche sono polari reciproche rispetto alle 36 coniche dei 4 cicli $S_3'^2$ $S_3''^2$ $S_3'''^2$ $S_3''''^2$, che si riferiscono

[1] Vedi Clebsch, *Vorlesungen ueber Geometrie*, p. 572.

rispettivamente ai 4 trilateri della curva. Tre sole di queste 36 coniche sono reali e formano una terna di uno dei quattro cicli (').

18. Ad una curva L corrisponde rispetto ai cicli S_3^2 un ciclo di 9 curve, che si scompone in tre cicli $(L_c)^3$ $(L_b)^3$ $(L_a)^3$. Ora se una curva di uno di questi cicli ha una certa proprietà projettiva con la C_3, è chiaro, che la stessa proprietà l'avranno pure le altre due curve del ciclo, dunque:

Teorema XLIX. Ad una curva L corrispondono tre cicli $(L_a)^3$ $(L_b)^3$ $(L_c)^3$, rispetto ad uno qualunque dei cicli S_3^2, che si riferiscono ad uno dei trilateri della C_3. Se una curva di uno di quei tre cicli ha con la C_3 una proprietà projettiva, le altre due curve del ciclo avranno con la C_3 la medesima proprietà.

Consideriamo ora il fascio sizigetico:

$$x_1^3 + x_2^2 + x_3^3 + 6k\,x_1 x_2 x_3 = 0. \qquad (1)$$

Una curva qualunque f di esso ha la sua Hessiana Δ nel fascio stesso. Due punti conjugati P_1 Q_1 dell'Hessiana rispetto alla f, dànno luogo a due coppie di punti P_2 Q_2, P_3 Q_3, che formano coi due primi due cicli $(P_a)^3$ $(Q_a)^3$, inscritti pure in Δ. P_2 Q_2, P_3 Q_3 sono anche coppie di punti conjugati rispetto alla f. Infatti P_1 ha la proprietà, che la sua conica polare rispetto alla C_3 ha un punto doppio in Q_1; ebbene pel teorema precedente i punti P_2 P_3 avranno la stessa proprietà, così Q_2 Q_3. Questo si vede facilmente anche analiticamente. Onde uno dei sistemi di punti conjugati di Δ si trasforma in sè stesso, rispetto ai cicli S_3^2, che si riferiscono ai trilateri di Δ.

Teorema L. In una C_3 un sistema di punti conjugati si trasforma in sè stesso rispetto ai cicli S_3^2, che si riferiscono ad uno qualunque dei suoi trilateri.

19. Le rette, che congiungono due a due i punti di un ciclo $(P_a)^3$, dato da un punto $(y_1\, y_2\, y_3)$, hanno per coordinate $\left(\frac{1}{y_1}\frac{1}{y_2}\frac{1}{y_3}\right)$, $\left(\frac{r}{y_1}\frac{r^2}{y_2}\frac{1}{y_3}\right)$, $\left(\frac{r^2}{y_1}\frac{r}{y_2}\frac{1}{y_3}\right)$ e formano perciò un ciclo $(q_a)^3$. Le 6 rette che congiungono due a due i punti dei cicli $(P_b)^3$ $(P_c)^3$ formano i due cicli $(q_b)^3$ $(q_c)^3$. Ora se consideriamo un ciclo $(P_a)^3$ inscritto nella C_3, i lati di esso formano un ciclo $(q_a)^3$, e i loro ulteriori punti d'incontro con la C_3 formano un altro ciclo $(N_a)^3$, perchè essendo N_1 il punto d'incontro di q_1 con C_3, è evidente che i punti N_2 N_3, che formano con N_1 il gruppo $(N_a)^3$ sono situati sulla C_3 ed anche in $q_2\, q_3$, dunque:

Teorema LI. Se dei lati di un ciclo $(P_a)_3$ inscritto in C_3 si trovano i tre ulteriori punti d'incontro con C_3, essi formano un ciclo $(Q_a)^3$. — Che relazione hanno i successivi cicli che si ottengono continuando l'operazione col ciclo $(Q_a)^3$ ecc.?

20. Nel fascio sizigetico sciegliamo la curva

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 6mr^2 x_1 x_2 x_3 = 0 \qquad (1)$$

ove r^2 è una delle radici cubiche dell'unità. Se il punto P_1 $(y_1\, y_2\, y_3)$ è situato

(') Queste 36 coniche furono incontrate per altra via dal prof. Battaglini in una sua recente Nota, che fa parte di un volume, che si sta pubblicando in onore del Chelini.

sulla (1) allora non solamente vi sono situati i punti (ry_1, r^2y_2, y_3) $(r^2 y_1, ry_2, y_3)$ ma anche i punti (ry_1, y_2, y_3), (y_1, ry_2, y_3), (r^2y_1, r^2y_2, y_3) e perciò i due cicli $(P_a)^3$ $(P_b)^3$ sono inscritti nella (1). Prendendo in considerazione tutti i quattro trilateri del fascio si ha:

Teorema LII. Ci sono rispetto ad ogni trilatero di un fascio sizigetico due sistemi di curve C_3 per le quali, dato un punto P o una tangente q di esse, due dei cicli $(P_a)^3$ $(P_b)^3$ $(P_c)^3$ o $(q_a)^3$ $(q_b)^3$ $(q_c)^3$ sono inscritti in esse o circoscritti ad esse.

Finalmente sia $k=0$, la curva

$$x_1^3 + x_2^3 + x^3 = 0 \tag{2}$$

è una curva A. Un suo punto P od una sua tangente q dà un ciclo $(P)^9$ inscritto in essa od un ciclo $(q)^9$ circoscritto ad essa. La curva ha la stessa polare reciproca rispetto alle coniche di un ciclo qualunque S_3^2, che si riferisce al triangolo fondamentale (Teor. XXXII e segg.).

Teorema LIII. In un fascio sizigetico di curve C_3 c'è rispetto ad uno qualunque dei trilateri del fascio una curva equianarmonica, per la quale, dato un suo punto P od una sua tangente q il ciclo $(P)^9$ o $(q)^9$ corrispondente è inscritto in essa o circoscritto ad essa. Essa ha rispetto alle 9 coniche di un ciclo qualunque S_3^2, che si riferisce a quel trilatero, la stessa polare reciproca, che varia da ciclo a ciclo, e che è una curva equianarmonica di 3ª classe. Ogni punto od ogni tangente della curva equianarmonica di 3° ordine dà luogo rispetto ad un trilatero a un ciclo di 6. 9=54 punti inscritto in essa o di 54 tangenti circoscritto ad essa (Teorema XXXV).

Il caso $n=4=2.2$ dà luogo ad un ciclo S_4^2 di 16 coniche, che pel teorema XX si decompone in 4 cicli S_2^2. La curva A

$$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 0 \tag{1}$$

ha una stretta relazione con questi gruppi di 16 coniche ed ogni suo punto P ed ogni sua tangente q dà un ciclo di 16 punti $(P)^{16}$ inscritto nella curva o di 16 rette $(q)^{16}$ circoscritto ad essa. Se poi si scambiano le coordinate fra loro da ogni punto o da ogni tangente della curva se ne ottengono altri 5, che soddisfano il teorema XXXV. Onde ogni punto od ogni tangente della (1) dà luogo ad un ciclo di 96 punti inscritto nella curva o di 96 rette circoscritto ad essa.

I punti o tangenti singolari della curva devono somministrare dei gruppi speciali.

Pongo fine alla discussione di questi ed altri casi speciali nel piano. Siccome i casi $n=2$ ed $n=3$ presentano tanto interesse, è probabile, che dando ad n altri valori si ottengano altri gruppi di coniche ed altri cicli di punti, non senza interesse. Passo ora a sviluppare la medesima teoria nello spazio, tralasciando però tutte quelle dimostrazioni o teoremi, che si enunciano nella stessa guisa nel piano.

Parte II.

21. Nello spazio invece di considerare due coniche C_1 C_2 come nel n. 1 considero due superficie di 2° grado C_1 C_2 cioè:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0 \tag{1}$$

$$a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 + a_4x_4^2 = 0 \tag{2}$$

Se per un punto P_1 $(y_1 y_2 y_3 y_4)$ operiamo la trasformazione polare nel senso $C_1 C_2$ abbiamo una serie di punti $P_1 P_2 \ldots P_n \ldots$, le cui coordinate sono della forma $a_i^{-m} y_i$, e analogamente quelle della serie dei piani polari $\Pi_1 \Pi_2 \ldots \Pi_n \ldots$ La trasformazione polare nel senso $C_2 C_1$ ci dà la serie di punti $P_{-1} P_{-2} \ldots P_{-n} \ldots$ le cui coordinate sono della forma $a_i^m y_i$, così quelle della serie dei piani polari Π_{-1} $\Pi_{-2} \ldots \Pi_{-n} \ldots$ Le coordinate dei punti consecutivi di P_1 sono dunque della seguente forma:

$$\mu x_i = a_i^m y_i \tag{3}$$

ove m è un intero qualunque. È chiaro, anche qui, che il gruppo (P) determina due spazî projettivi, perchè i poli di un piano rispetto a due superficie di 2° grado $C_1 C_2$, formano due spazî projettivi, i cui punti uniti sono i vertici del tetraedro conjugato comune delle due superficie $C_1 C_2$. Se il punto P_1 si muove in una retta r, i suoi consecutivi si muoveranno nelle consecutive di r, descrivendo delle punteggiate projettive; se P_1 si muove in un piano Π_1, i suoi consecutivi si muoveranno nei piani consecutivi di Π_1, generando dei piani punteggiati projettivi; se P_1 si muove in uno spigolo del tetraedro fondamentale, tutti i punti del gruppo (P) si muoveranno in quello spigolo, se invece P_1 si muove in una delle faccie di quel tetraedro, tutti i suoi consecutivi si muoveranno pur essi in quella faccia.

Dunque per le due superficie $C_1 C_2$ valgono i teoremi analoghi ai teoremi I e II dati per le coniche, ed inoltre

Teorema LIV. Se il punto (P) è situato sopra uno spigolo del tetraedro fondamentale, il gruppo P è situato sul medesimo spigolo, se P_1 è situato invece sopra una faccia di esso, il gruppo (P) è situato su quella faccia, formando un gruppo projettivo piano rispetto alle due coniche d'intersezione delle superficie $C_1 C_2$ con essa. Se le due superficie $C_1 C_2$ hanno una retta comune e il punto P_1 giace in questa retta, il gruppo (P) sarà situato sulla medesima retta.

Se il punto P_1 è un punto delle due superficie per es. C_1 allora i piani del gruppo polare reciproco di (P) rispetto a $C_1 C_2$ passano rispettivamente per un punto di (P), e i punti di (P) sono perciò due a due conjugati rispetto a C_1 e C_2, in modo però che un punto del gruppo ha rispetto C_1 e C_2 due punti conjugati distinti. Qui possiamo fare dell'analoghe considerazioni che abbiam fatto al n. 2, rispetto alle due superficie $C_1 C_2$, per dimostrare che se due punti di un gruppo (P) sono conjugati rispetto ad una delle superficie $C_1 C_2$, uno dei punti del gruppo è situato in una delle due superficie. Per le superficie $C_1 C_2$ valgono i teoremi analoghi ai teoremi III, VI, VII e IX.

Teorema LV. Se il punto P_1 è situato sulle due superficie $C_1 C_2$, i piani del gruppo polare (Π) di (P) passano ciascuno per due punti di (P). Analogamente se P_1 è uno dei punti di contatto di un piano tangente comune alle due superficie $C_1 C_2$.

Siccome di un punto o di un piano di coordinate $y_1 y_2 y_3 y_4$, sono consecutivi i punti o piani, le cui coordinate sono della forma $a_i^n\, y_i$, così di una retta, le cui coordinate sono p'_{ik}, sono consecutive le rette le cui coordinate sono:

$$\mu p_{ik} = a_i^n\, a_k^n\, p'_{ik} \tag{4}$$

ove n è un numero intero qualunque. L'equazione di C_1 e C_2 in coordinate di rette sono:

$$\Sigma p^2_{12} = 0 \qquad \Sigma a_3 a_4 p^2_{12} = 0 . \tag{5}$$

I lati di un poligono, formato dalle rette, che congiungono due punti immediatamente consecutivi di un gruppo (P), oppure di due punti tali che gl'indici, indicanti il posto di essi in (P), diano una differenza costante, sono rette consecutive, che s' incontrano rispettivamente nei punti di (P); ciò non vuol dire però che due rette immediatamente consecutive di un gruppo qualunque si debbano in generale incontrare. Se di un piano Π troviamo i due poli rispetto a C_1 C_2 e della retta congiungente di essi, troviamo le due conjugate rispetto a C_1 C_2, queste due rette sono immediatamente consecutive, dunque:

Teorema LVI. In un piano Π qualunque ci sono due rette immediatamente consecutive di un determinato gruppo, e infinite coppie di punti immediatamente consecutivi, che appartengono rispettivamente ad infiniti gruppi (P).

22. Un gruppo (P) qualunque è inscritto in una curva trascendente W intersezione dei 4 coni, che si ottengono dall'equazioni

$$\mu x_1 = a_1^n y_1, \quad \mu x_2 = a_2^n y_2, \quad \mu x_3 = a_3^n y_3, \quad \mu x_4 = a_4^n y_4$$

eliminando fra tre di esse μ ed n. L'equazioni di questi 4 coni sono:

$$\left(\frac{x_1}{y_1}\right)^{\log\frac{a_2}{a_3}} \left(\frac{x_2}{y_2}\right)^{\log\frac{a_3}{a_1}} \left(\frac{x_3}{y_3}\right)^{\log\frac{a_1}{a_2}} = 1, \quad \left(\frac{x_2}{y_2}\right)^{\log\frac{a_3}{a_4}} \left(\frac{x_3}{y_3}\right)^{\log\frac{a_4}{a_2}} \left(\frac{x_4}{y_4}\right)^{\log\frac{a_2}{a_3}} = 1$$

$$\left(\frac{x_1}{y_1}\right)^{\log\frac{a_4}{a_1}} \left(\frac{x_3}{y_3}\right)^{\log\frac{a_1}{a_3}} \left(\frac{x_4}{y_4}\right)^{\log\frac{a_3}{a_1}} = 1, \quad \left(\frac{x_1}{y_1}\right)^{\log\frac{a_2}{a_4}} \left(\frac{x_2}{y_2}\right)^{\log\frac{a_4}{a_1}} \left(\frac{x_4}{y_4}\right)^{\log\frac{a_1}{a_2}} = 1 \tag{1}$$ (¹).

Il gruppo (P) ha rispetto a tutte le superficie dei due gruppi (R_1) ed (R_2) lo stesso gruppo polare reciproco (Π), i piani di questo gruppo inviluppano una superficie sviluppabile w, che è la polare reciproca di W rispetto alle superficie di (R_1) ed (R_2). Quindi ogni punto di W dà luogo ad un gruppo (P) inscritto in W, così ogni sua tangente o piano osculatore. Analogamente per la sviluppabile w. Abbiamo supposto però tacitamente $a_1\, a_2\, a_3\, a_4\, (+)$, perchè altrimenti i punti di un gruppo non sarebbero situati solamente in una curva W. Osserviamo che lo spigolo di regresso di w è pure una curva W, e se la W è una curva algebrica, come può esserlo, allora ha l'ordine eguale alla sua classe. Queste curve W come è chiaro, passano per due vertici del tetraedro fondamentale, toccano ivi due spigoli ed hanno ivi due faccie come piani osculatori. Se si ha per es.

$$a_2 > a_2 > a_3 > a_4$$

i due primi coni (1) si possono mettere sotto la seguente forma:

$$\left(\frac{x_1}{y_1}\right)^{\log\frac{a_2}{a_3}} \left(\frac{x_3}{y_3}\right)^{\log\frac{a_1}{a_2}} = \left(\frac{x_2}{y_2}\right)^{\log\frac{a_2}{a_3} + \log\frac{a_1}{a_2}} \tag{2}$$

$$\left(\frac{x_2}{y_2}\right)^{\log\frac{a_3}{a_4}} \left(\frac{x_4}{y_4}\right)^{\log\frac{a_2}{a_3}} = \left(\frac{x_3}{y_3}\right)^{\log\frac{a_3}{a_4} + \log\frac{a_2}{a_3}} \tag{3}$$

(¹) Vedi Battaglini l. c.

Questi sono due coni coi vertici in $x_1=x_2=x_3=0$ e $x_2=x_3=x_4=0$ e con la generatrice $x_2=x_3=0$ comune.

Supponendo $\quad a_1 a_3=a_2^2 \quad a_2 a_4=a_3^2 \quad$ (4)

da cui $\quad a_1 a_4=a_3^3 \quad a_4 a_1^2=a_2^3$

i coni (2) e (3) diventano di 2° grado cioè:

$$\left(\frac{x_1}{y_1}\right)\left(\frac{x_3}{y_3}\right)=\left(\frac{x_2}{y_2}\right)^2 \qquad \left(\frac{x_2}{y_2}\right)\left(\frac{x_4}{y_4}\right)=\left(\frac{x_3}{y_3}\right)^2$$

mentre gli altri due sono

$$\left(\frac{x_1}{y_1}\right)\left(\frac{x_4}{y_4}\right)^2=\left(\frac{x_3}{y_3}\right)^3; \qquad \left(\frac{x_1}{y_1}\right)^2\left(\frac{x_4}{y_4}\right)=\left(\frac{x_2}{y_2}\right)^3$$

Questi sono due coni di terzo ordine con una generatrice cuspidale ed una d'inflessione. I 4 coni generano evidentemente una cubica gobba, che passa per i punti $x_1=x_2=x_3=0$, $x_2=x_3=x_4=0$ e tocca in essi le due rette $x_1=x_4=0$ e $x_1=x_2=0$ ed ha nel primo per piano osculatore il piano $x_1=0$, nel 2° il piano $x_4=0$. Questo risulta chiaro dalle equazioni dei coni stessi e sapendo che projettando una curva gobba da un punto di una sua tangente, il cono projettante ha questa retta come generatrice cuspidale, se esso ha ivi anche una generatrice d'inflessione, vuol dire che il piano tangente al cono lungo questa generatrice contiene due tangenti della curva infinitamente vicine ossia che è un piano osculatore della curva. Presi due punti A_1, A_4 qualunque di una cubica gobba e i piani osculatori e le tangenti in essi alla curva, e di queste si trovano rispettivamente i punti d'incontro $A_2 A_3$ coi due piani osculatori, si ottiene un tetraedro $A_1 A_2 A_3 A_4$, rispetto al quale la cubica gobba si trova nelle stesse condizioni della precedente rispetto al tetraedro fondamentale.

Teorema LVII. Un gruppo projettivo (P) qualunque è situato nello spazio in una curva gobba trascendente W. Del gruppo (P) è polare reciproco rispetto a tutte le superficie di (R_1) e (R_2) un gruppo projettivo (Π_1), il quale genera la sviluppabile w, polare reciproca di W rispetto a quelle superficie. Ogni punto od ogni tangente od ogni piano tangente e osculatore di W dà luogo ad un gruppo inscritto in essa o circoscritto ad essa. Analogamente per w. Le curve W passano per due vertici del tetraedro fondamentale, toccano ivi due spigoli ed hanno in essi due facce come piani osculatori. La loro superficie sviluppabile è una superficie w (Vedi Teorema LXI).

Teorema LVIII. Le curve W possono essere algebriche, esse hanno l'ordine eguale alla classe. Di queste curve fa parte la cubica gobba.

Teorema LIX. Presi due punti $A_1 A_2$ di una cubica gobba e costruiti i punti d'incontro $A_3 A_4$ delle tangenti in essi coi piani osculatori in essi alla curva, si ottiene un tetraedro $A_1 A_2 A_3 A_4$. La cubica gobba è una curva W rispetto ad infiniti sistemi di gruppi (R_1) ed (R_2) di superficie di 2° grado, che si riferiscono a quel tetraedro.

Teorema LX. Alle curve W appartengono gli spigoli opposti del tetraedro fondamentale. Due curve W non possono avere in comune altri punti all'infuori dei vertici del tetraedro fondamentale ed altri piani osculatori o rette tangenti all'infuori delle facce o spigoli di esso.

23. Le curve W gobbe hanno analoghe proprietà delle curve W piane incontrate al n. 3. Esse hanno per equazioni differenziali, supponendo $x_4 = 1$, $a_4 = 1$ e $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\log a_2}{\log a_1} \frac{y}{x}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{\log a_3}{\log a_1} \frac{z}{x} \tag{1}$$

che risultano da due dei 4 coni, trovati al n. 22. Se ora si considera la trasformazione infinitesima

$$\begin{aligned} x &= x' + \log a_1 . x' . dm \\ y &= y' + \log a_2 . y' . dm \\ z &= z' + \log a_3 . z' . dm \end{aligned} \tag{2}$$

le curve W mediante questa trasformazione si trasformano in sè medesime, in modo che ripetendola infinite volte si può passare da un punto di W ad un altro qualunque di essa ottenendo una trasformazione finita della forma

$$x_i = a_1^m x' \quad y = a_2^m y' \quad z = a_3^m z' \tag{3}$$

Da ciò si vede che due punti qualunque di W si possonò considerare come punti immediatamente consecutivi di un gruppo (P), rispetto ad un sistema di due gruppi di superficie (R_1) ed (R_2), che si riferiscono al tetraedro, invariabile nella trasformazione (2), i quali dipendono dalle quantità a_1, a_2, a_3. Ha luogo perciò per le curve gobbe W il teorema analogo al teorema XII. Un teorema analogo vale pure per le superficie sviluppabili w.

Si ha pure:

Teorema LXI. Le curve W non possono avere dei punti o tangenti singolari che nei vertici o spigoli del tetraedro fondamentale. Le superficie sviluppabili w, non possono avere altri piani singolari all'infuori dei piani del tetraedro fondamentale.

Teorema LXII. Il punto di contatto P di una tangente di una curva W e i tre punti d'incontro di essa con tre facce del tetraedro fondamentale, formano un rapporto anarmonico costante qualunque sia la tangente di W.

Se dai punti di W projettiamo i vertici del tetraedro fondamentale si ottengono delle stelle projettive, nelle quali si corrispondono i piani osculatori di W.

Teorema LXIII. Uno dei punti d'incontro P di una curva W con una delle superficie dei gruppi (R_1) ed (R_2), dà luogo ad un gruppo (P) inscritto in W, i cui punti sono due a due conjugati rispetto alle superficie dei gruppi (R_1) ed (R_2). Analogamente per un piano osculatore di W tangente ad una di quelle superficie.

Se la curva W tocca in un punto una delle superficie di (R_1) e (R_2), i piani tangenti della sua superficie polare reciproca w rispetto a quelle superficie, sono tangenti a W, se invece il piano osculatore di W nel punto di contatto è anche tangente alla 1ª superficie, la W ha per sua polare reciproca rispetto a (R_1) e (R_2) la sua stessa superficie sviluppabile.

24. Secondo il n. 21 le formole di trasformazione per due rette consecutive sono

$$\mu p_{ik} = a_i^n\, a_k^n\, p'_{ik}. \qquad (1)$$

Data una retta è evidente che tutte le sue consecutive generano una superficie rigata F, che conterrà tutte le curve W generate dai punti della retta. L'equazioni, che determinano la superficie F, corrispondente alla retta p_{ik} è data da tre delle seguenti equazioni:

$$\left(\frac{p_{12}}{p'_{12}}\right)^{\frac{1}{\log a_1 a_2}} = \ldots = \left(\frac{p_{34}}{p'_{34}}\right)^{\frac{1}{\log a_3 a_4}}. \ (^1)$$

È chiaro che questa superficie può essere algebrica qualora gli esponenti siano proporzionali a numeri razionali.

Teorema LXIV. Le rette di un gruppo projettivo (r) sono situate in una superficie rigata F. Ogni retta della superficie dà luogo ad un gruppo inscritto in essa. Essa ha la stessa polare reciproca rispetto alle superficie di (R_1) ed (R_2).

Teorema LXV. Se le due rette, che generano due superficie F, s'incontrano, le due superficie F s'incontrano in una curva W ed hanno una superficie sviluppabile w comune, oltre gli spigoli del tetraedro fondamentale, pei quali esse passano. Se invece quelle due rette non s'incontrano le due superficie F non hanno nè alcuna curva W nè alcuna sviluppabile w comune. Le superficie F hanno tutte le loro rette singolari negli spigoli del tetraedro fondamentale.

Teorema LXVI. Se una superficie F, ha una retta comune con una delle superficie di (R_1) ed (R_2), essa è reciproca di sè stessa rispetto a tutte le superficie (R_1) (R_2).

Teorema LXVII. Le generatrici di F, tagliano le 4 facce del tetraedro fondamentale secondo 4 punti di un rapporto anarmonico costante [2].

Come per le coniche qui si può dimostrare che al massimo $\frac{(n+1)\,(n+2)\,(n+3)}{2.3} - 1$ punti immediatamente consecutivi di un gruppo (P) possono essere situati in una superficie dell'ordine n, perchè se ce ne fosse uno di più sarebbero tutti situati sulla superficie. Però si può cercare la posizione speciale di C_1 C_2, in

(1) Battaglini l. c.

(2) Vedi Klein e Lie, Comptes rendus p. 1222 e 1275, 1870.

modo che $\frac{(n+1)\ (n+2)\ (n+3)}{2\,.\,3}$ punti di un gruppo (P), ma non immediatamente consecutivi siano situati in una superficie d'ordine n.

Se $$\log a_1 : \log a_2 : \log a_3 : \log a_4 = n_1 : n_2 : n_3 : n_4$$
essendo $n_1\ n_2\ n_3\ n_4$ dei numeri razionali, la C_2 si pone sotto la forma
$$\Sigma e^{n_1}\, x_1^2 = 0\,.$$

25. Ora data la superficie $C_1 \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$ vogliamo determinare la C_2 in tal maniera, che dato il punto $P(y_1 y_2 y_3 y_4)$ il punto P_n del gruppo (P) coincida con P. Si dovrà perciò avere:
$$a_1 = \sqrt[n]{1} \quad a_2 = \sqrt[n]{1} \quad a_3 = \sqrt[n]{1} \quad a_4 = 1\,.$$
Scegliendo per $a_1\ a_2\ a_3$ una delle radici n^{me} dell'unità si ottiene un ciclo di n^3 superficie $S_n{}^3$ fra le quali è compresa pure la C_1. Siano date due di queste superficie per es.
$$r^p\ x_1^2 + r^q\ x_2^2 + r^s\ x_3^2 + x_4^2 = 0 \tag{1}$$
$$r^{p_1} x_1^2 + r^{q_1} x_2^2 + r^{s_1} x_3^2 + x_4^2 = 0 \tag{2}$$
e di un punto $P(y_1 y_2 y_3 y_4)$ si costruiscano i consecutivi sì nella trasformazione (1) (2) come anche nella trasformazione (2) (1), i punti P_n e P_{-n} coincidono con P. Il gruppo projettivo (P) diventa un ciclo projettivo. Analogamente per una retta, un piano o per qualunque altro ente geometrico. L'equazione di una delle n^3 superficie si può mettere anche sotto la forma:
$$e^{\frac{2\mu_1\pi}{n}}\ x_1^2 + e^{\frac{2\mu_2\pi}{n}}\ x_2^2 + e^{\frac{2\mu_3\pi}{n}}\ x_3^2 + x_4^2 = 0 \tag{3}$$
ove $\mu_1 \mu_2 \mu_3$ sono numeri interi, che variano da 0 ad $n-1$.

Teorema LXVIII. Data una superficie di 2° ordine ce ne sono altre n^3-1 che formano con la 1ª un ciclo $S_n{}^3$. Due a due sono in tale posizione che il gruppo (P) corrispondente ad un punto P, contiene n punti di un ciclo projettivo $(P)^n$. A questo ciclo corrisponde un ciclo di n piani $(\Pi)^n$, polare reciproco del 1° rispetto alle due superficie. Le n^3 superficie del ciclo $S_n{}^3$ hanno lo stesso tetraedro conjugato comune. Per esse vale il teorema analogo al teorema XX.

Una superficie qualunque di $S_n{}^3$ per es.
$$r^p\, x_1^2 + r^q\, x_2^2 + r^s\, x_3^2 + x_4^2 = 0 \tag{4}$$
interseca lo spigolo per es. $x_3 = x_4 = 0$ nei due punti $\frac{x_1}{x_2} = \pm i\sqrt{r^{q-p}}$, quindi le n^3 superficie di $S_n{}^3$ tagliano quello spigolo in sole n coppie di punti, vale a dire che per ogni coppia di punti di esso passano n^2 superficie del ciclo. La (4) taglia inoltre il piano per es. $x_1 = 0$ nella conica
$$r^q\, x_2^2 + r^s\, x_3^2 + x_4^2 = 0\,.$$

È chiaro che le n^3 superficie incontrano quel piano in sole n^2 coniche, e che queste formano un ciclo piano $S_n{}^2$; onde in ciascuna di queste coniche si toccano

n superficie di S_n^3. Queste n superficie formano un' ennupla di 1 specie. Due coppie di punti, dati dalle superficie del ciclo, su due spigoli opposti del tetraedro fondamentale formano un quadrangolo gobbo; per i lati di esso passano n superficie del ciclo S_n^3; esse formano un' ennupla di 2^a specie.

Teorema LXIX. Le n^3 superficie di un ciclo S_n^3 incontrano ciascuno degli spigoli del tetraedro conjugato comune di esse in n coppie S_n di punti e ciascuno delle due facce in n^2 coniche di un ciclo S_n^2. — In ognuna di queste coniche, si toccano n superficie di S_n^3, e formano un'ennupla di 1^a specie. Nei lati di un quadrangolo gobbo, che ha i suoi vertici in due coppie S_n di due spigoli opposti, passano n superficie di S_n^3, che formano un ennupla di 2^a specie. Ci sono 4 n^2 ennuple 1^a specie e 3 n^2 di 2^a.

La polare reciproca di una superficie qualunque di S_n^3

$$r^p x_1^2 + r^q x_2^2 + r^s x_3^2 + x_4^2 = 0$$

rispetto ad un'altra superficie $r^{p_1} x_1^2 + r^{q_1} x_2^2 + r^{s_1} x_3^2 + x_4^2 = 0$.

è $$r^{2p_1-p} x_1^2 + \ldots = 0,$$ dunque:

Teorema LXX. La polare reciproca di una superficie di S_n^3 rispetto ad un'altra superficie di esso appartiene a S_n^3.

Ci sono quattro casi da considerare per la posizione reciproca di due superficie di 2° grado S_n^3, mentre per le coniche ce ne sono due soli (n° 5). O le due superficie si toccano lungo una conica ed allora appartengono ad un'ennupla di 1^a specie, o s'incontrano lungo i 4 lati di un quadrangolo gobbo ed allora appartengono ad un'ennupla di 2^a specie, o incontrano gli spigoli del tetraedro fondamentale in coppie di punti distinte, oppure si toccano in due punti di uno spigolo.

Nel 1° caso le due superficie si mettono sotto la seguente forma:

$$\begin{aligned} r^p x_1^2 + r^q x_2^2 + r^s x_3^2 + x_4^2 &= 0 \\ r^{p_1} x_1^2 + r^q x_2^2 + r^s x_3^2 + x_4^2 &= 0\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Nel 2°

$$\begin{aligned} r^p x_1^2 + r^q x_2^2 + r^s x_3^2 + x_4^2 &= 0 \\ r^{p+p_1} x_1^2 + r^{q+p_1} x_2^2 + r^s x_3^2 + x_4^2 &= 0\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Nel 3°

$$\begin{aligned} r^p x_1^2 + r^q x_2^2 + r^s x_3^2 + x_4^2 &= 0 \\ r^{p+p_1} x_1^2 + r^{q+q_1} x_2^2 + r^{s+s_1} x_3^2 + x_4^2 &= 0\,. \end{aligned} \tag{3}$$

Nel 4° caso

$$\begin{aligned} r^p x_1^2 + r^q x_2^2 + r^s x_3^2 + x_4^2 &= 0 \\ r^{p+p_1} x_1^2 + r^{q+q_1} x_2^2 + r^s x_3^2 + x_4^2 &= 0\,. \end{aligned} \tag{4}$$

26. Le due superficie (1) appartengono ad un' ennupla di 1^a specie. Il ciclo projettivo $(P)^n$ di un punto P qualunque rispetto alle due superficie (1) è situato sopra una retta passante pel vertice $x_2 = x_3 = x_4 = 0$; analogamente i piani del ciclo polare reciproco $(\Pi)^n$ s'incontrano in una retta di $x_1 = 0$.

Le due superficie (2) appartengono ad un' ennupla di 2^a specie. Il ciclo $(P)^n$ corrispondente ad un punto P rispetto ad esse, è situato sopra una retta t, che si appoggia ai due spigoli $x_3 = x_4 = 0$, $x_1 = x_2 = 0$, ove giaciono i vertici del quadrangolo comune alle due superficie (2). — Analogamente i piani del ciclo polare reciproco di $(P)^n$ s'incontrano in una retta che si appoggia agli stessi due spigoli opposti. Dunque:

Teorema LXXI. La polare reciproca di una superficie di un'ennupla di 1ª o 2ª specie rispetto ad una superficie dell'ennupla è una superficie di essa. I cicli (R_1) ed (R_2), generati da due superficie dell'ennupla di 1ª o 2ª specie, coincidono con l'ennupla stessa.

Teorema LXXII. Il ciclo P^n, che corrisponde ad un punto P rispetto a due superficie di un'ennupla di 1ª o 2ª specie, è situato in una retta t, e i piani del ciclo polare $(\Pi)^n$ s'incontrano in una retta t_1. Se l'ennupla è di 1ª specie la retta t_1 è situata sul piano del tetraedro fondamentale, ove si toccano le n superficie dell'ennupla e la retta t passa pel vertice opposto, mentre se l'ennupla è di 2ª specie le rette t e t_1 si appoggiano sulla coppia di spigoli opposti, ove sono situati i vertici del quadrangolo comune alle superficie dell'ennupla. Le rette del ciclo $(t)^n$ corrispondenti ad una retta t per l'ennupla di 1ª specie, s'incontrano in un punto del piano, ove si toccano le n superficie dell'ennupla, e stanno in un piano col vertice opposto, mentre se l'ennupla è di 2ª specie le rette di $(t)^n$ determinano un'iperboloide, che passa per gli spigoli opposti, ove sono situati i vertici del quadrangolo comune alle superficie dell'ennupla.

27. Siano date ora due superficie del ciclo S_n^3, che incontrano gli spigoli del tetraedro fondamentale in coppie di punti distinte, per es.

$$r^p x_1^2 + r^q x_2^2 + r^s x_3^2 + x_4^2 = 0 \tag{1}$$

$$r^{p+p_1} x_1^2 + r^{q+q_1} x_2^2 + r^{s+s_1} x_3^2 + x_4^2 = 0. \tag{2}$$

Moltiplicando i coefficienti di x_1^2, x_2^2, x_3^2 ordinatamente per r^{p_1}, r^{q_1}, r^{s_1} si ha un'altra superficie di S_n^3 cioè:

$$r^{p+2p_1} x_1^2 + r^{q+2q_1} x_2^2 + r^{s+2s_1} x_3^2 + x_4^2 = 0 \tag{3}$$

che interseca gli spigoli del tetraedro fondamentale in punti diversi da quelli delle due prime. Ora dalla (3) si può ottenere nella stessa guisa un'altra superficie di S_n^3 e così continuando si trovano tutte le superficie di S_n^3, le cui equazioni sono della forma:

$$r^{p+mp_1} x_1^2 + r^{q+mq_1} x_2^2 + r^{s+ms_1} x_3^2 + x_4^2 = 0. \tag{4}$$

Queste superficie compresa la (1) sono n e formano un' *ennupla di* 3ª *specie.* Esse tagliano gli spigoli del tetraedro fondamentale in coppie di punti distinte.

Tenendo fissi come moltiplicatori r^{p_1}, r^{q_1}, r^{s_1} il ciclo S_n^3 si separa in n^2 ennuple di 3ª specie $(A)^n$ $(B)^n$ . . . $(N^n)^2$.

Con analoghe considerazioni fatte per le coniche al n. 6 si dimostra che con la n^3 superficie di S_n^3, si formano $(n-3)^2$ sistemi di n^2 ennuple di 2ª specie.

Teorema LXXIII. Con le n^3 superficie del ciclo S_n^3, si formano $(n-3)^2$ sistemi di n^2 cicli di n superficie (ennuple di 3ª specie) $(A)^n (B)^n .... (N^2)^n$. Le n superficie di un'ennupla di 3ª specie incontrano gli spigoli del tetraedro fondamentale in n coppie di punti distinte e le facce di esso in n^2 coniche di un ciclo piano S_n^2. I cicli (R_1) (R_2), determinate da due qualunque superficie dell' ennupla di 3ª specie coincidono con l' ennupla stessa.

Teorema LXXIV. Il ciclo $(P)^n$ che corrisponde a un punto P rispetto a due superficie di un'ennupla di 3ª specie ha lo stesso ciclo polare reciproco rispetto a tutte le superficie dell' ennupla. Esso è situato in una curva gobba W algebrica, che ha la stessa polare reciproca rispetto a tutte le n superficie dell' ennupla.

Il ciclo $(t)^n$ corrispondente ad una retta t rispetto a due superficie di un'ennupla, ha lo stesso polare reciproco rispetto alle superficie dell' ennupla. Esso è situato in una superficie F algebrica, che ha la stessa polaro reciproca rispetto alle superficie dell' ennupla.

Teorema LXXV. In una curva gobba W algebrica si possono inscrivere e circoscrivere dei gruppi projettivi aperti e chiusi di punti, di tangenti, di piani osculatori. In una superficie algebrica F, sono inscrivibili dei gruppi projettivi aperti e chiusi di rette (Teor. XXVI).

Abbiamo visto che la cubica gobba appartiene alle curve W essa si può ottenere qualunque sia n, purchè siano soddisfatte le condizioni (4) (n 22). Infatti supponendo $a_1 = r^p$, $a_2 = r^q$, $a_3 = r^s$ $a_4 = 1$ le due prime formole (4) divengono $r^p\, r^s = r^{2q}$ e $r^q = r^{2s}$. Ora perchè ciò avvenga basta supporre q numero primo con n, e $q + 2(x + 1)\, n = 2s$ per es. $q + n = 2s$ da cui $s = \dfrac{q+n}{2}$.

Teorema LXXVI. Si può sempre trovare un'ennupla di 3ª specie di un ciclo S_n^3, per la quale un ciclo qualunque $(P)^n$ sia situato in una cubica gobba, tranne nel caso in cui $n=3$.

Teorema LXXVII. Se i punti di alcuni cicli projettivi $(P)^n$ rispetto ad un'ennupla di 1ª, 2ª o 3ª specie determinano una sola curva o superficie d'ordine m; essa ha la stessa polare reciproca rispetto a tutte le n superficie dell'ennupla e ogni suo elemento dà luogo ad un ciclo inscritto o circoscritto ad essa (Teor. XXVII).

Siano date le n^3 superficie di S_n^3 disposte in un dato ordine e di un punto $P(y_1\, y_2\, y_3\, y_4)$ troviamo il piano polare rispetto alla 1ª, di questo il polo rispetto alla 2ª, di questo il piano polare rispetto alla 3ª e così di seguito; otteniamo così un ciclo di n^3 punti $(P)^{n^3}$ e un ciclo di n^3 piani $(\Pi)^{n^3}$, le cui coordinate sono della forma

$$r^p\, y_1\,,\quad r^q\, y_2\,,\quad r^s\, y_3\,,\quad y_4\,.$$

Essi sono indipendenti dall'ordine delle n^3 superficie di S_n^3 e perciò sono polari reciproci rispetto alle medesime.

Teorema LXXVIII. Se di un punto P si determina il piano polare rispetto alla prima delle n^3 superficie, disposte in un dato ordine, di questo il polo rispetto alla 2ª, di questo il piano polare rispetto alla 3ª e così di seguito, si ottengono due cicli, uno di

n^3 punti $(P)^{n^3}$ ed uno di n^3 piani $(\Pi)^{n^3}$, che sono indipendenti dall'ordine delle n^3 superficie e polari reciproci rispetto ad esse. Date $2r+1$ delle n^3 superficie di S_n^3, ha luogo il teorema analogo al teorema XXIV.

Date le n^2 ennuple di 1ª specie, le cui superficie si toccano in n^2 coniche situate in una faccia del tetraedro fondamentale, il ciclo $(P)^{n^3}$, che corrisponde ad un punto P, si scompone rispetto ad esse in n^2 cicli situati in n^2 rette, che passano per il vertice opposto di quella faccia; e il ciclo $(\Pi)^{n^3}$ polare reciproco si scompone in n^2 cicli di n piani, che s'incontrano in n^2 rette di essa.

Teorema LXXIX. Un ciclo $(P)^{n^3}$ si scompone in n^2 cicli di n punti situati sopra n^2 rette di 1ª specie, che passano per uno qualunque dei vertici del tetraedro fondamentale. Il ciclo $(\Pi)^{n^3}$, polare reciproco del 1° rispetto alle n^3 superficie di S_n^3, si scompone in n^2 cicli di n piani, che s'incontrano in n^2 rette di 1ª specie situate sulla faccia opposta a quel vertice. Gli n^2 cicli di $(P)^{n^3}$ e gli n^2 cicli $(\Pi)^{n^3}$, sono ordinatamente polari reciproci rispetto a ciascuna delle n^2 ennuple di 1ª specie, le cui superficie si toccano lungo n^2 coniche, situate su quella faccia. Il ciclo $(P)^{n^3}$ ha rispetto alle $4n^2$ ennuple di 1ª specie $4n^2$ rette di 1ª specie.

28. Siano ora date le n^2 ennuple di 2ª specie, le cui superficie s'incontrano in quadrilateri aventi i loro vertici in due spigoli opposti del tetraedro fondamentale. Come risulta dal teorema LXXII, il ciclo $(P)^{n^3}$ si scompone per ognuna di quelle ennuple in n^2 cicli di n punti, situati in n^2 rette, che si appoggiano su quei due spigoli; analogamente il ciclo polare reciproco $(\Pi)^{n^3}$ si scompone in n^2 cicli di n piani, che s'incontrano in n^2 rette, che pure s'appoggiano su quei due spigoli. Infatti gli n^2 punti di $(P)^{n^3}$ che hanno le due stesse ultime coordinate, sono situati in un piano passante per lo spigolo $x_3=x_4=0$ e siccome essi sono situati su n rette, che s'appoggiano sullo spigolo $x_1=x_2=0$, vuol dire che queste n rette s'incontrano in un punto di $x_1=x_2=0$. Questo piano nel quale giaciono n^2 punti del ciclo $(P)^{n^3}$, contiene anche n delle n^2 rette di 1ª specie del ciclo $(P)^{n^3}$, che passano per i punti $x_1=x_2=x_4=0$ e $x_1=x_2=x_4=0$; perchè gli n^2 punti del ciclo $(P)^{n^3}$ che esso contiene, determinano anche n ad n $2n$ rette di 1ª specie passanti n ad n per il 1° e 2° vertice.

Teorema LXXX. Un ciclo $(P)^{n^3}$ si scompone in n^2 cicli projettivi di n punti situati su n^2 rette di 2ª specie, che si appoggiano ad una coppia di spigoli opposti del tetraedro fondamentale. Esse s'incontrano n ad n in n punti di ciascuno di questi spigoli. Analogamente pel ciclo polare reciproco $(\Pi)^{n^3}$. Gli n^2 cicli di $(P)^{n^3}$, sono ordinatamente polari reciproci degli n^2 cicli di $(\Pi)^{n^3}$ rispetto alle n^2 ennuple di 2ª specie, le cui superficie s'incontrano in quadrilateri, aventi i loro vertici in quella coppia di spigoli opposti.

Le n^2 rette di 2ª specie del ciclo $(P)^{n^3}$ sono situate n ad n in n piani passanti per ognuno dei due spigoli. Uno qualunque di questi piani contiene pure n delle n^2 rette di 1ª specie del ciclo

$(P)^{n^3}$, che passano per i due vertici dello spigolo fondamentale, situato in quel piano.

29. Sia data una retta t di 2ª specie del ciclo $(P)^{n^3}$, che si appoggia per es. sugli spigoli $x_1=x_2=0$, $x_3=x_4=0$ e conduciamo le n rette, che passano per gli n punti P di t, e che incontrano due spigoli $x_1=x_4=0$ $x_2=x_3=0$. Un iperboloide, che passa per i 4 spigoli $x_1=x_4=0$ $x_2=x_3=0$. $x_1=x_2=0$ $x_1=x_4=0$ e per la retta t, passa evidentemente, anche per le n rette suddette. In una di queste rette ci sono oltre del punto d'incontro con t, altri $n-1$ punti di $(P)^{n^3}$, quindi le rette che passano per essi ed incontrano gli spigoli $x_1=x_2=0$, $x_3=x_4=0$ appartengono a quell' iperboloide e incontrano le altre $n-1$ rette nei punti del ciclo $(P)^{n^3}$, in esse situati. Così abbiamo $2n$ rette di 2ª specie di $(P)^{n^3}$, che s'incontrano in n^2 punti di $(P)^{n^3}$ e situate in un iperboloide, passante per 4 spigoli del tetraedro fondamentale. Con gli n^3 punti di $(P)^{n^3}$ si ottengono n di questi gruppi di n^2 punti, situati in n iperboloidi, passanti per le stesse due coppie di spigoli opposti, onde:

Teorema LXXXI. Prese due coppie di spigoli opposti del tetraedro fondamentale, gli n^3 punti del ciclo $(P)^{n^3}$ si separano in n gruppi O di n^2 punti; gli n^2 punti di un gruppo sono situati n ad n in $2n$ rette di 2ª specie del ciclo, che incontrano rispettivamente le due coppie di spigoli opposti. Gli n gruppi O sono situati rispettivamente in n iperboloidi, che contengono le due coppie di spigoli opposti.

Consideriamo ora una delle rette di 1ª specie di $(P)^{n^3}$ passante pel vertice $x_1=x_2=x_3=0$ del tetraedro fondamentale; si vede chiaramente che non può contenere due punti di un medesimo gruppo O. Se ciò fosse le due rette di 2ª specie di $(P)^{n^3}$, che passano per essi e incontrano i due spigoli opposti $x_1=x_2=0$ $x_3=x_4=0$ dovrebbero essere situate in un piano con uno di questi spigoli e quindi dovrebbero incontrarsi in uno di essi (teor. LXXX) e perciò l'iperboloide ove è situato il gruppo O avrebbe tre delle sue rette incontrantesi in un punto, ciò che è impossibile. Se uniamo tutti gli n^2 punti di un gruppo O con uno dei vertici del tetraedro conjugato fondamentale, si ottengono le n^2 rette di 1ª specie di $(P)^{n^3}$, che passano per quel punto. Sopra ciascuna di queste rette sono disposti gli $n-1$ punti del ciclo $(P)^{n^3}$, che appartengono rispettivamente agli altri $n-1$ gruppi O del teorema precedente. Dato il punto P $(y_1\, y_2\, y_3\, y_4)$, la retta di 2ª specie del ciclo $(P)^{n^3}$, che passa per esso e s'appoggia sugli spigoli $x_1=x_2=0$ $x_3=x_4=0$ contiene i punti

$$(ry_1 \cdot ry_2,\ y_3,\ y_4)\ ;\ \ (r^2 y_1,\ r^2 y_2,\ y_3,\ y_4)\ \ldots\ (r^{n-1}y_1,\ r^{n-1}y_2,\ y_3,\ y_4)$$

così la retta, che si appoggia sugli spigoli $x_1=x_4=0$ $x_2=x_3=0$ contiene i punti

$$(y_1,\ ry_2,\ ry_3,\ y_4),\ \ (y_1,\ r^2y_1,\ r^2y_2,\ y_4)\ \ldots\ (y_1,\ r^{n-1}y_2,\ r^{n-1}y_3,\ y_4).$$

Invece dato il punto $r^{\alpha}y_1, y_2, y_3, y_4$ che è allineato con $y_1\ y_2\ y_3\ y_4$ col vertice $x_2=x_2=x_4$, le due rette che si spiccano da esso e si appoggiano sugli stessi spigoli opposti contengono rispettivamente i punti:

$$r^{\alpha+1}y_1,\ ry_2,\ \ y_3,\ y_4\ \ldots\ r^{\alpha+n-1}y_1,\ r^{n-1}y_2,\ \ y_3,\ y_4$$

$$r^{\alpha}y_1,\ ry_2,\ ry_3,\ y_4\ \ldots\ \ r_{\alpha}y_1,\ r^{n-1}y_2,\ r^{n-1}y_3,\ y_4.$$

Ora è chiaro il 1° punto $r^{\alpha+1}y_1,\ ry_2,\ y_3,\ y_4$ determina una retta, che passa pei punti ry_1, ry_2, y_3, y_4 e $x_2=x_3=x_4=0$. Sia $y_1\ y_2\ y_3\ y_4$, come abbiamo detto, un punto del 1° gruppo O e $r^\alpha y_1$, y_2, y_3, y_4 un punto del 2° situato in una retta col primo e con $x_1=x_3=x_4=0$ e si scelgano altri due punti qualunque del 1° gruppo per es. ay_1, by_2, cy_3, y_4; a_1y_1, b_1y_2, c_1y_3, y_4. Quelli appartenenti al 2° e allineati con $x_2=x_3=x_4$ sono:

$$r^\alpha ay_1,\ by_2,\ cy_3,\ y_4\,;\quad r^\alpha a_1y_1,\ b_1y_2,\ c_1y_3,\ y_3\,.$$

Il piano dei tre punti del 1° gruppo O si mette sotto la forma

$$A_1x_1+A_2x_2+A_3x_3=A_4x_4=0$$

e quello dei tre del 2°

$$A_1x_1+r^\alpha A_2x_2+r^\alpha A_3x_3+r^\alpha A_4x_4=0$$

i quali due piani evidentemente s' incontrano in una retta del piano $x_1=0$; onde i piani, che uniscono tre a tre i punti di due gruppi O, i cui punti sono due a due allineati rispettivamente con uno dei vertici del tetraedro fondamentale, si tagliano in una retta della faccia opposta.

Teorema LXXXII. Due gruppi O qualunque, che si riferiscono a due stesse coppie di spigoli opposti, sono omologhi in 4 maniere differenti per i 4 vertici del tetraedro fondamentale come centro e le 4 facce opposte come piani di omologia

30. Abbiasi ora un sistema di n^2 ennuple di 3ª specie, cioè $(A)^n\ (B)^n \ldots\ (N^2)^n$, il ciclo si scompone rispetto a ciascuna di esse in n^2 cicli projettivi di n punti situati in altrettante curve W (Teor. LXXIV), così il ciclo polare reciproco $(\Pi)^3$ si scompone in n^2 cicli projettivi, che generano le sviluppabili W, polari reciproche delle W rispetto a quelle 2 ennuple. È chiaro che gli n^2 cicli di punti hanno ordinatamente per polari reciproci rispetto alle n^2 ennuple del sistema gli n^2 cicli $(\Pi)^{n^3}$, dunque:

Teorema LXXXIII. Il ciclo $(P)^{n^3}$ si scompone in n^2 cicli projettivi di n punti $(P_a)^n\ (P_b)^n \ldots\ (P_{n^2})^n$ rispetto alle n^2 ennuple di 3ª specie $(A)^n\ (B)^n \ldots\ (N^2)^n$ di un sistema di $S_n{}^3$ (teor. LXXIII).

Così il ciclo $(\Pi)^{n^3}$ polare reciproco di (P^{n^3}) rispetto alle superficie di $S_n{}^3$ si scompone in n^2 cicli projettivi $(\Pi_a)^n\ (\Pi_b)^n \ldots\ (\Pi_{n^2})^n$. I cicli $(P_a)^n\ (P_b)^n \ldots\ (P_{n^2})^n$ hanno per polari reciproci rispetto a tutte le n^2 ennuple di 3ª specie del sistema ordinatamente i cicli $(\Pi_a)^n\ (\Pi_b)^n \ldots\ (\Pi_{n^2})^n$. Le curve W algebriche sulle quali sono situati $(P_a)^n$, $(P_b)^n, \ldots\ (P_{n^2})^n$ hanno gli stessi caratteri, ed hanno per sviluppabili polari rispetto alle ennuple n le w generate da $(\Pi_a)^n, \ldots\ (\Pi_{n^2})^n$.

Possiamo anche qui enunciare un teorema analogo al teorema XXXII cioè:

Teorema LXXXIV. Ogni punto, ogni tangente od ogni piano tangente delle superficie A, le cui equazioni rispetto al tetraedro, fondamentale di $S_n{}^3$ non contengono che le n^{me} potenze o multipli delle n^{me} potenze delle variabili dà luogo ad un ciclo inscritto in esse o circoscritto ad esse. Una superficie A ha rispetto a tutte le n^3 superficie di $S_n{}^3$ la stessa polare reciproca.

Il punto di contatto di tre punti d' incontro di una tangente q di una superficie A, con tre delle facce del tetraedro fondamentale, danno un rapporto anarmonico costante per tutte le rette del ciclo $(q)^{n^3}$. Projettando da quelle tangenti, i vertici del tetraedro fondamentale si ottengono 4 piani, che hanno uno stesso rapporto anarmonico.

Qui possiamo fare la stessa osservazione del n. 9 e se ne deduce.

Teorema LXXXV. Scambiando in tutti i modi possibili le 4 coordinate $y_1\, y_2\, y_3\, y_4$ di un punto P si ottengono 24 punti, situati 6 a 6 in 16 coniche. I 6 punti di una conica soddisfano il teorema XXXIV; i 16 piani delle 16 coniche si separano in 4 gruppi rispetto alle 4 facce del tetraedro fondamentale. I 4 piani del gruppo, che si riferisce per es. alla faccia $x_1=0$ s' incontrano nella retta $x_2+x_3+x_4=0$ di essa. I 24 punti P sono situati in una superficie di 2° ordine.

Teorema LXXXVI. Ogni punto, ogni tangente od ogni piano tangente di una superficie A, dà luogo ad un ciclo M di $24.n^3$ punti inscritto in essa o di $24.n^3$ tangenti o piani tangenti circoscritti ad essa. Le singolarità della A della stessa specie (per es. I punti doppî, i piani doppî ecc.) devono dar luogo ad uno o più cicli speciali M il cui numero d' elementi deve essere un divisore o un multiplo di 24 e di n^3.

Caso speciale $n=2$.

31. Nel piano per $n=2$ abbiamo ottenuto 4 coniche. Nello spazio per $n=2$ si ottengono 8 superficie di 2° grado; che possiamo chiamare pure *armoniche*, esse risultano anche cercando le superficie di 2° grado rispetto alle quali due date superficie sono polari reciproche. Sotto quest' ultimo punto di vista furono accennate da Steiner (¹), alcune delle loro proprietà furono date da Battaglini (²). La ricerca un po' intima di queste superficie, credo non sia stata fatta da alcuno; io qui enuncerò i teoremi, che più m' interessano per lo sviluppo della IIª Memoria, i quali non sono del resto che corollarî di quelli già enunciati. Le 8 superficie hanno per equazioni:

$$\left.\begin{aligned} x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2&=0\\ x_1^2-x_2^2-x_3^2+x_4^2&=0\\ -x_1^2+x_2^2-x_3^2+x_4^2&=0\\ -x_1^2-x_2^2+x_3^2+x_4^2&=0 \end{aligned}\right\}\ (1) \qquad \left.\begin{aligned} -x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2&=0\\ x_1^2-x_2^2+x_3^2+x_4^2&=0\\ x_1^2+x_2^2-x_3^2+x_4^2&=0\\ x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_4^2&=0\,. \end{aligned}\right\}\ (2)$$

Come si vede facilmente queste 8 superficie si dividono in due gruppi di 4, in un gruppo si passa da un' equazione all' altra mediante lo scambio di due segni, mentre da una di un gruppo si passa ad una dell'altro mediante lo scambio di un solo segno. Pel teorema LXIX le 8 superficie incontrano gli spigoli del tetraedro fondamentale in due coppie di punti distinte, le coordinate dei punti per es. sullo spigolo $x_1=x_2=0$ sono:

$$\frac{x_1}{x_2}=\pm 1 \qquad \frac{x_1}{x_2}=\pm\sqrt{-1}\,.$$

Queste due coppie di punti le chiamo $P^2{}_1\, P'_{12}$, $P^{i}_{12}\, P^{i'}_{12}$, esse oltre che dividere armonicamente le coppie di vertici del tetraedro fondamentale, si dividono armonicamente anche fra loro. Come si vede la coppia $P'_{12}\, P^{i'}_{12}$ è immaginaria. — Secondo

(¹) Vol. 32. Crelle.

(²) Atti della r. Acc. dei Lincei 1872, e D'Ovidio Giorn. di Battaglini vol. X.

lo stesso teorema LXIX tagliano le 8 superficie del ciclo S_2^3 le facce del tetraedro fondamentale secondo 4 coniche armoniche; in una di queste coniche si toccano 2 superficie di S_2^3 e costituiscono una coppia di 1ª specie. Le coppie di 2ª specie sono date da quelle superficie che s'incontrano nei lati di un quadrangolo gobbo, i cui vertici sono sopra due degli spigoli del tetraedro fondamentale, cioè sono due coppie di punti P_{ik}. Ora, come è evidente, due superficie di un gruppo formano una coppia di 2ª specie, mentre due di gruppi diversi formano una coppia di 1ª specie. — Si vede pure che una delle superficie del 1° gruppo è immaginaria e le altre 3 sono iperboloidi, mentre le altre 4 sono superficie a punti ellittici. Dunque:

Teorema LXXXVII. Le 8 superficie armoniche di 2° ordine, che si ottengono per $n=2$, si dividono in due gruppi di 4 superficie. Quelle di un gruppo sono a punti ellittici, di quelle dell'altro, tre sono iperboloidi ad una falda, la 4ª è immaginaria.

Teorema LXXXVIII. Le 8 superficie del ciclo S_2^3 tagliano ciascun spigolo del loro tetraedro conjugato in due coppie di punti $P_{ik}\,P'_{ik}$, $P^{i}_{ik}\,P^{i'}_{ik}$, di cui una è immaginaria; esse dividono armonicamente la coppia di vertici $A_i\,A_k$ del tetraedro situati in quello spigolo e si separono armonicamente fra loro. Le 8 superficie tagliano ciascuna faccia del tetraedro in un ciclo S_2^2 di 4 coniche armoniche. In una di queste coniche si toccano due superficie di una coppia di 1ª specie (Teor. LXIX).

Teorema LXXXIX. Le superficie di uno stesso gruppo formano due a due una coppia di 2ª specie, cioè s'incontrano nei lati di un quadrilatero gobbo, i cui vertici sono 4 punti P_{ik} situati su due spigoli opposti; due superficie di gruppi diversi formano una coppia di 1ª specie. Le coppie di 1ª specie sono 16, le coppie di 2ª specie sono 12, 6 per gruppo. Non ci sono coppie di 3ª specie (Teor. LXX).

Teorema XC. Ciascuna delle 8 superficie è reciproca di sè stessa rispetto alle altre 7 (Teor. LXXII).

Di due superficie di un gruppo per es.

$$x_1^2 + x_2^2 \quad x_3^2 + x_4^2 = 0$$
$$x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + x_4^2 = 0$$

l' invariante simultaneo

$$A_{1222} = \Sigma \begin{vmatrix} a'_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a'_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a'_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{44} \\ a'_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix} = 0 \,.$$

Invece per due superficie appartenenti a due gruppi diversi si ha

$$A_{1122} = \Sigma \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a'_{12} & a'_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a'_{13} & a'_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a'_{14} & a'_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix} = 0 \,.$$

Ora l'essere $A_{1222} = 0$ vuol dire che ci sono infiniti tetraedri conjugati all' una inscritti o circoscritti all'altra, mentre $A_{1122} = 0$ vuol dir che ci sono infiniti tetraedri conjugati all'una e i cui spigoli toccano l'altra (¹).

Teorema XCI. Per due superficie di uno stesso gruppo vi sono infiniti tetraedri conjugati all' una e inscritti e circoscritti all' altra.— Per due di diversi gruppi ci sono infiniti tetraedri conjugati all'una e i cui spigoli toccano l' altra.

Qui possiamo enunciare senz' altro i seguenti teoremi, che non sono altro che corollarî dei teoremi LXXII, LXXIX cioè:

Teorema XCII. Se di un punto P si trova il piano polare rispetto ad una delle 8 superficie di S_2^3, di questo il polo rispetto ad un altra, di questo il piano polare rispetto alla 1ª ecc. si ottiene un ciclo projettivo di due punti $P P_1$, di cui è polare reciproco rispetto alle due superficie un ciclo di due piani Π e Π_1. La retta r, che congiunge i due punti P e P_1 e la retta r, d'intersezione dei due piani Π e Π_1 si appoggiano su due spigoli opposti del tetraedro fondamentale, se le due superficie appartengono ad una coppia di 2ª specie; $P P_1$ e $\Pi \Pi_1$ sono allora divisi armonicamente dai due spigoli opposti.— Se le due superficie formano una coppia di 1ª specie, la retta r_1 è situata sul piano, ove si toccano le due superficie, mentre la retta r passa pel vertice opposto. $P P_1$ e $\Pi \Pi_1$ sono allora diversi armonicamente dal vertice e dalla faccia opposta.

Teorema XCIII. Se di un punto P si trova il ciclo corrispondente $(P)^8$ rispetto alle 8 superficie di S_2^3 e il ciclo degli 8 piani polari $(\Pi)^8$, essi formano due figure polari reciproche, rispetto alle 8 superficie di 2° grado. Gli 8 punti del ciclo $(P)^8$ formano due tetraedri omologici in 4 maniere differenti per i 4 vertici del tetraedro fondamentale e per le facce opposte come centro e piani di omologia (Teor. LXXXI).

L' ultima parte di questo teorema si dimostra anche nel seguente modo. Gli 8 punti del ciclo $(P)^8$ sono:

$$\begin{array}{rrrrcrrrr} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & \qquad & -y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ y_1 & -y_2 & -y_3 & y_4 & & y_1 & -y_2 & y_3 & y_4 \\ -y_1 & y_2 & -y_3 & y_4 & & y_1 & y_2 & -y_3 & y_4 \\ -y_1 & -y_2 & y_3 & y_4 & & y_1 & y_2 & y_3 & -y_4 \end{array}$$

Si dividono, come si vede, in due gruppi come le 8 superficie di S_2^3; le rette che congiungono due punti di uno stesso gruppo sono rette di 2ª specie di $(P)^8$, mentre quelle che uniscono i punti di gruppi diversi sono rette di 1ª specie. Le 1ᵉ sono gli spigoli dei 2 tetraedri, mentre le altre 16 passano 4 a 4 per i vertici del tetraedro fondamentale.— La figura formata da questi tre tetraedri, cioè dai due dati da $(P)^8$ e da quello fondamentale, è studiata diffusamente nella IIª Memoria. Le coordinate dei piani di $(\Pi)^8$ sono le medesime di quelle dei punti $(P)^8$ e formano perciò due analoghi tetraedri. Uno dei vertici di questi due ultimi tetraedri ha per

(¹) *Analy. Geom. des Raumes* 1. Theil. Salmon-Fiedler p. 235. — 2ª edizione.

coordinate $\frac{1}{y_1}, \frac{1}{y_2}, \frac{1}{y_3}, \frac{1}{y_4}$. Questo punto lo chiamo conjugato di y_1, y_2, y_3, y_4 rispetto al tetraedro fondamentale e si costruisce nel seguente modo. Si congiunge uno spigolo del tetraedro col punto (y_1, y_2, y_3, y_4), si ottiene un piano che forma un certo angolo α con una delle facce del tetraedro che s' incontrano in quello spigolo, si costruisce un piano passante per esso e che formi con l'altra faccia un angolo α diretto nello stesso senso del 1°. Così facendo per tutti e 6 gli spigoli si ottengono 6 piani, che s'incontrano nel conjugato di P. Analogamente chiamo piano conjugato di un piano rispetto ad un tetraedro, quello che ha le coordinate inverse del dato.

Teorema XCIV. Gli 8 Vertici dei due tetraedri del ciclo $(\Pi)^8$ polare reciproco di $(P)^8$ rispetto alle 8 superficie del ciclo S_2^3 sono i punti conjugati dei punti $(P)^8$ rispetto al tetraedro fondamentale. Per punti conjugati intendo quelli che hanno le coordinate inverse rispetto a quel tetraedro.

32. Consideriamo un tetraedro $(P)^8$ e uno del ciclo $(\Pi)^8$ per es. i due tetraedri:

$$
\begin{array}{llllcllll}
y_1, & y_2, & y_3, & y_4 & \qquad & \frac{1}{y_1} & \frac{1}{y_2} & \frac{1}{y_3} & \frac{1}{y_4} \\[6pt]
y_1 & -y_2 & -y_3 & y_4 & & \frac{1}{y_1} & -\frac{1}{y_2} & -\frac{1}{y_3} & \frac{1}{y_4} \\[6pt]
-y_1 & -y_2 & y_3 & y_4 & & -\frac{1}{y_1} & -\frac{1}{y_2} & \frac{1}{y_3} & \frac{1}{y_4} \\[6pt]
-y_1 & y_2 & -y_3 & y_4 & & -\frac{1}{y_1} & \frac{1}{y_2} & -\frac{1}{y_3} & \frac{1}{y_4}
\end{array} \qquad (1)
$$

Congiungendo y_1 con $\frac{1}{y_1}$ mediante una retta t, a questa retta corrispondono le rette, che congiungono i punti della stessa orizzontale in (1). Le altre 4 rette, uniscono due a due i vertici dei due tetraedri rimanenti di $(P)^8$ e $(\Pi)^8$. Queste 8 rette giaciono in un iperboloide. Infatti se per gli 8 punti di $(P)^8$ e di $(\Pi)^8$ e per un altro punto di t si fa passare un iperboloide, ciò che è sempre possibile, esso conterrà anche le altre 7 rette del ciclo $(t)^8$. Esso ha evidentemente il tetraedro fondamentale come conjugato. Ora però invece di unire y_i con $\frac{1}{y_i}$ possiamo unirlo con un altro dei vertici del tetraedro $(\Pi)^8$, si ha allora un'altra retta t_1 il cui ciclo $(t_1)^8$ dà luogo ad un altro iperboloide, che passa per gli stessi 8 punti di $(P)^8$ e di $(\Pi)^8$. Onde così si ottengono 4 iperboloidi, che appartengono ad un fascio. Ora se si considera l'altro tetraedro di $(\Pi)^8$, si ottengono altri 4 iperboloidi, che appartengono al medesimo fascio. Gli 8 piani di $(\Pi)^8$ sono i conjugati degli 8 piani di $(P)^8$ rispetto al tetraedro fondamentale; onde i due tetraedri di $(P)^8$ e i due tetraedri di $(\Pi)^8$, con le intersezioni delle loro facce generano altri 8 iperboloidi, che appartengono ad una schiera e che hanno il tetraedro fondamentale come conjugato.

Teorema CXV. Uno dei tetraedri di $(P)^8$ e uno di $(\Pi)^8$ sono « iperboloidici » in 4 maniere differenti. I 4 iperboloidi generati rispettivamente dai quattro gruppi di 4 rette, che congiungono i vertici dei due tetraedri due a due, sono anche generati rispettivamente dai quattro gruppi di 4 rette, che congiungono due a due i vertici dei due tetraedri rimanenti di $(P)^8$ e $(\Pi)^8$ e che formano con le prime 4 un ciclo $(t)^8$. Altri 4 iperboloidi sono generati dal 1° tetraedro di $(P)^8$ e dal 2° di $(\Pi)^8$ oppure dal 2° di $(P)^8$ e dal 1° di $(\Pi)^8$.— Questi 8 iperboloidi appartengono ad un fascio ed hanno il tetraedro fondamentale come conjugato.

Ci sono altri 8 iperboloidi, generati dalle rette d'intersezione delle facce dei tetraedri di $(P)^8$ e $(\Pi)^8$, essi formano una schiera ed hanno pure per tetraedro conjugato il fondamentale.

Il polare reciproco di uno degli 8 iperboloidi, generati dai vertici dei tetraedri di $(P)^8$ e $(\Pi)^8$ rispetto alle 8 superficie di S_2^3 è uno degli 8 iperboloidi della schiera. Infatti esso si può considerare come una superficie A del teorema LXXXIV. Se si fa passare per gli 8 punti di un ciclo $(P)^8$ una superficie di 2° grado, ogni suo punto od ogni sua retta dà luogo a un ciclo inscritto in essa, mentre ogni suoi piano tangente dà luogo a un ciclo circoscritto ad essa. Essa non è altro, che una superficie A, che ha la medesima polare reciproca rispetto alle 8 superficie di S_2^3.

Teorema XCVI. Uno degli 8 iperboloidi del 1° gruppo per polare reciproco rispetto alle 8 superficie di S_2^3 uno degli 8 iperboloidi del 2° gruppo.

Teorema XCVII. Se una superficie di 2° grado passa per 8 punti di un ciclo $(P)^8$, ogni suo punto P o retta q o piano tangente Π, dà luogo ad un ciclo $(P)^8$ o $(q)^8$ o $(\Pi)^8$ inscritto in essa o circoscritto ad essa. Essa ha la stessa polare reciproca rispetto alle 8 superficie di S_2^3 (Teor. LXXXIII). Ogni suo punto dà luogo ad un ciclo di $8 . 24 = 192$ punti inscritto in essa.

Mi pare debba essere di molto interesse lo studio di $n=3$ ed $n=4$ ecc. in relazione alle superficie $x_1^n + x_2^n + x_3^n + x_4^n = 0$.

MEMORIA II.

Dal caso $n=2$ nello spazio si deduce la figura studiata da Klein nella sua Memoria: *Ueber die Liniencomplexe* 1^{ens} *und* 2^{ens} *Grades* (¹). Il punto di vista, sotto il quale io considero questa figura è molto diverso da quello di Klein, e perciò mi è dato di ricavare molte nuove ed interessanti proprietà di questa figura importante.

Abbiamo visto nella Iª Memoria, che pel caso $n=2$ un ciclo $(P)^8$ si scompone in due tetraedri omologici in 4 maniere differenti rispetto ai vertici e alle facce opposte del tetraedro fondamentale, come centri e piani di omologia. Credo che Hermes sia stato il primo od uno dei primi a considerare un gruppo simile di tre tetraedri, studiando un esaedro, le cui diagonali s'incontrano in un punto (²). Essi si presentano anche nello studio della superficie dei centri di curvatura di una superficie di 2° grado (³) e nello studio dei centri di similitudine di 4 sfere (⁴). La figura di questi tre tetraedri si deduce con grande facilità dal teorema IV della mia Memoria sull'*Hexagrammum mysticum* (⁵), che dimostra, che se i due triangoli $A_1 B_1 C_1$ e $A_2 B_2 C_2$ sono omologici per un centro D_3; i punti $A_1 B_2 . A_2 B_1 \equiv C_3$, $A_1 C_2 . A_2 C_1 \equiv B_3$, $A_1 C_2 . B_2 C_1 \equiv A_3$, formano un triangolo omologico ai due primi, per i centri $D_2\, D_1$, i quali sono allineati con D_3. Il sig. dott. Stephanos Cyparissos, come l'ho già notato nei Transunti della r. Accademia dei Lincei del mese di aprile testè passato, ha studiato contemporaneamente a me, la figura formata da un gruppo di tre tetraedri omologici in 4 maniere differenti nell'ultimo fascicolo del *Bulletin dés sciences mathematiques* di Darboux dell'anno scorso. Le mie ricerche si spingono però molto più oltre di quelle del sig. Stephanos Cyparissos, oltre che esse hanno un'intima relazione con le teorie sviluppate nella Iª Memoria (⁶).

Infine faccio un' applicazione della figura all' Hexagrammum e studio due fasci di superficie di 4° ordine, dotate di 12 punti doppî comuni, che formano precisamente un gruppo di tre tetraedri omologici in 4 maniere differenti. Questi tetraedri li chiamo fasciali (⁷).

(¹) Math. Annalen, vol. II.

(²) Vol. 56 Crelle.

(³) Vedi Clebsch, *Ueber das Problem der Normalen bei Curven und Flächen* 2 *Ordnung*. Crelle 62 e parte III di questa Mem.

(⁴) Vedi n. 5.

(⁵) Atti della r. Acc. dei Lincei 1877.

(⁶) Faccio osservare che io ho studiato già la sezione piana e la projezione fatta di un punto sopra un piano di questa figura nella mia Memoria stessa dell'Hexagrammum.

(⁷) Il sig. Cyparissos li chiama desmiques (da δέσμη, fascio).

Parte I.

Tetraedri fasciali.

1. Sia dato un tetraedro fondamentale $(A) \equiv A_1 A_2 A_3 A_4$ ed un punto B_1 di coordinate $X_1 X_2 X_3 X_4$; ci sono altri 7 punti, con le medesime coordinate, però con segni diversi; questi 8 punti formano un ciclo $(P)^8$ (vedi Teor. XCIII, Mem. I[a]) e formano perciò due tetraedri omologici in 4 maniere differenti per i vertici e le facce opposte del tetraedro (A), come centri e piani di omologia. Siano $B_1 B_2 B_3 B_4 \equiv (B)$ e $C_1 C_2 C_3 C_4 \equiv (C)$ i due tetraedri; le coordinate dei loro vertici sono:
per (B) X_1, X_2, X_3, X_4; $X_1, X_2, -X_3, -X_4$; $X_1, -X_2, X_3, -X_4$; $X_1, -X_2, -X_3, X_4$
e per (C) $X_1, X_2, X_3, -X_4$; $X_1, X_2, -X_3, X_4$; $X_1, -X_2, X_3, X_4$; $-X_1, X_2, X_3, X_4$.

Se per maggior semplicità poniamo $X_1 = X_2 = X_3 = X_4 = 1$; le facce dei tetraedri si mettono sotto la forma

$$\pm x_1 \pm x_2 \pm x_3 \pm x_4 = 0$$

onde le formole di trasformazione dal tetraedro (A) a (B) sono:

$$(1) \quad x'_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4; \quad x'_2 = -x_1 - x_2 + x_3 + x_4; \quad x'_3 = -x_1 + x_2 - x_3 + x_4$$
$$x'_4 = x_1 - x_2 - x_3 + x_4$$

da cui quelle da (B) a (A) sono:

$$(2) \quad x_1 = x'_1 - x'_2 - x'_3 + x'_4; \quad x_2 = x'_1 - x'_2 + x'_3 - x'_4, \quad x_3 = x'_1 + x'_2 - x'_3 - x'_4$$
$$x_4 = x'_1 + x'_2 + x'_3 + x'_4 .$$

Analogamente si hanno le formole di trasformazione per il tetraedro (A) e (C), basta cambiare il segno ad x_4 in (1). Se i due tetraedri (B) e (C) sono omologici pei vertici e piani opposti di (A), (B) ed (A), oppure (C) ed (A) sono pure omologici in 4 maniere differenti per i vertici e piani opposti del terzo tetraedro (C) o (B). Infatti si ha:

(3)	$B_1 B_2 B_3 B_4$,	$C_1 C_2 C_3 C_4$	omologici pel centro	A_1
	$B_1 B_2 B_3 B_4$,	$C_3 C_4 C_1 C_2$	»	A_2
	$B_1 B_2 B_3 B_4$,	$C_2 C_1 C_4 C_3$	»	A_3
	$B_1 B_2 B_3 B_4$,	$C_1 C_2 C_3 C_4$	»	A_4

Donde

$A_1 A_2 A_3 A_4$,	$B_4 B_3 B_2 B_1$	omologici pel centro	C_1
$A_1 A_2 A_3 A_4$,	$B_3 B_4 B_1 B_2$	»	C_2
$A_1 A_2 A_3 A_4$,	$B_2 B_1 B_4 B_3$	»	C_3
$A_1 A_2 A_3 A_4$,	$B_1 B_2 B_3 B_4$	»	C_4

Analogamente si ricava che (A) e (C) sono omologici in 4 maniere differenti, pei vertici e piani opposti di (B).

Dal quadro (3) si vede, che i vertici dei tre tetraedri (A) (B) e (C) sono tre a tre situati in 16 rette, che chiamo h, che passano 4 a 4 pei 12 vertici dei tre tetraedri; per es. per A_1 passano le 4 rette $B_1 C_1$, $B_2 C_3$, $B_3 C_2$, $B_4 C_1$. Siccome (B) e (C) formano un ciclo $(P)^8$ rispetto al tetraedro (A), così le 16 rette h sono le 16 rette di 1[a] specie di $(P)^8$ (n. 31, I[a] Mem.). Analogamente le 12 facce dei tre tetraedri (A) (B) e (C), s'incontrano tre a tre in 16 rette h', che sono situate 4 a 4 sopra ognuna di quelle facce. Siccome (B) e (C) formano anche un ciclo $(\Pi)^8$ rispetto al tetraedro (A), così le 16 rette h', d'intersezione delle facce dei due tetraedri due a due, sono le rette di 1ª specie di $(\Pi)^8$. Mentre tre dei vertici di (A) (B) e (C) sono in una retta h, le tre facce opposte s'incontrano in una retta corrispondente h'. Ora se consideriamo i due triangoli $A_1 A_2 A_3$, $B_1 B_2 B_3$, essi sono omologici pel centro C_4, i punti $A_1 B_2 . A_2 B_1 \equiv C_3$, $A_1 B_3 . A_3 B_1 \equiv C_2$ $A_2 B_3 . A_3 B_2 \equiv C_1$ formano il triangolo $C_1 C_2 C_3$, che è omologico con i due primi per i centri A_4 e B_4, e i tre centri A_4 B_4 C_4 sono situati in una retta h, mentre i tre piani $A_1 A_2 A_3 \equiv \alpha_4$, $B_1 B_2 B_3 \equiv \beta_4$, $C_1 C_2 C_3 \equiv \gamma_4$ s'incontrano in una retta h'. I due triangoli $A_1 A_2 A_3$, $B_1 B_2 B_3$ possono considerarsi come qualunque, purchè siano prospettivi per un centro C_4 ed allora si ottiene il teorema analogo al teorema IV della mia citata Memoria che si esprime con le stesse parole cioè:

Teorema I. Se si hanno due triangoli $A_1 A_2 A_3$, $B_1 B_2 B_3$, situati in piani differenti ed omologici pel centro C_4, i punti $A_1 B_2 . A_2 B_1 \equiv C_3$, $A_1 B_3 . A_3 B_1 \equiv C_2$, $A_2 B_3 . A_3 B_2 \equiv C_1$ danno un altro triangolo $C_1 C_2 C_3$ omologico coi due primi per i centri $A_4 B_4$; i tre centri $A_4 B_4 C_4$ sono situati in una retta h e i tre piani $A_1 A_2 A_3$, $B_1 B_2 B_3$, $C_1 C_2 C_3$ s'incontrano in una retta h', corrispondente alla retta h. Due dei tetraedri $A_1 A_2 A_3 A_4 \equiv (A)$, $B_1 B_2 B_3 B_4 \equiv (B)$, $C_1 C_2 C_3 C_4 \equiv (C)$ sono perciò omologici in quattro maniere differenti per ciascun vertice e piano opposto del terzo, come centro e piano di omologia. I loro vertici sono tre a tre situati su 16 rette h e le loro facce tre a tre s'incontrano in 16 rette h', a quelle corrispondenti.

Teorema II. Se uno dei tetraedri (A) (B) (C) si considera come tetraedro di riferimento, i vertici degli altri due hanno rispetto ad esso le medesime coordinate con segni differenti, formano cioè un ciclo $(P)^8$ rispetto al tetraedro di riferimento (Teor. XCIII, Iª Mem.).

2. Gli spigoli dei tetraedri (B) e (C), come abbiamo visto nel n. 33, Iª Memoria, sono rette di 2ª specie del ciclo $(P)^8$ che essi formano; ossia sono rette, che si appoggiano rispettivamente sulle tre coppie di spigoli opposti del tetraedro fondamentale (A). Due spigoli opposti di (A) vengono incontrati da due spigoli opposti di (B) in due punti P_{ik} e P'_{ik}, per i quali passano anche due spigoli opposti di (C). I due vertici di (B) o (C) situati sopra uno spigolo, che si appoggia su due spigoli opposti di (A), sono divisi armonicamente da questi due spigoli. Dal teorema LXXX Mem. Iª si deduce, che gli 8 vertici di (B) e (C) sono situati 4 a 4 in 12 piani Π_{ik} passanti due a due per uno qualunque degli spigoli di (A), i quali contengono 2 rette di 2ª specie, ossia due spigoli appartenenti l'uno a (B) e l'altro a (C), e 4 rette h. Del resto queste proprietà si possono verificare facilmente, anche senza la Iª Memoria. Se dagli spigoli del tetraedro (A) si projetta il punto B_1 sugli spigoli opposti, si ottengono 6 punti P_{ik}, tale che per es. P_{12}, è situato in $A_1 A_2$. Il piano, che projetta per es. dallo spigolo $A_3 A_4$ il punto B_1 sullo spigolo opposto $A_1 A_2$, ha per equazione

$$x_1 - x_2 = 0 \tag{1}$$

e perciò il punto P_{12} viene determinato nello spigolo $A_1 A_2$ da $\frac{x_1}{x_2} = 1$. L'equazione dunque dei 6 punti P_{ik} sono della forma

$$u_i - u_k = 0. \tag{2}$$

I 6 conjugati armonici P'_{ik} dei punti P_{ik} rispetto ai vertici di (A), hanno per equazione

$$u_i + u_k = 0 \tag{3}$$

e sono situati nel piano

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\,.$$

Questo si chiama il piano polare di B_1 rispetto al tetraedro (A), che è la faccia opposta di B_1 nel tetraedro (B). Per quello che si è detto precedentemente, per ogni punto P_{ik} o P'_{ik} passano uno spigolo di (B) ed uno di (C) e naturalmente anche uno di (A). I piani che projettano dagli spigoli di (A) i punti P'_{ik} sono:

$$x_i + x_k = 0 \tag{4}$$

quelli invece che projettano i punti P_{ik}

$$x_i - x_k = 0\,. \tag{5}$$

I primi li chiamo piani Π_{ik}, questi ultimi Π'_{ik}. Essi sono 12, passano due a due per ogni spigolo di (A), formando con le due facce, che s'incontrano in esse un gruppo armonico.

Per ciascuna retta h per es. per la retta $A_1 B_1 C_1$ cioè per la retta, che congiunge i punti di coordinate $(1,0,0,0)$ $(1,1,1,1,)$, $(-1,1,1,1)$, passano i tre piani $\Pi'_{12}\, \Pi'_{13}\, \Pi'_{14}$ cioè:

$$x_1 - x_2 = 0 \qquad x_1 - x_3 = 0 \qquad x_1 - x_4 = 0.$$

La figura dei piani Π_{ik} e Π'_{ik} è correlativa di quella formata dai punti P_{ik} P'_{ik}, poichè essi hanno le stesse relazioni colle facce dei due tetraedri (B) e (C), che i punti P_{ik} P'_{ik} hanno coi vertici stessi. — Si è visto nel principio di questo numero che i piani Π_{ik} e Π'_{ik} contengono 4 rette h, delle quali due s'incontrano in un vertice, le altre due in un altro vertice di (A). Le altre due coppie di vertici opposti del quadrilatero da esse formato, sono due coppie di vertici di (B) e due di (C); infatti congiungendo un punto di (B) con un punto di (A) in un piano Π_{ik} o Π'_{ik}, la retta congiungente h passa anche per un vertice di (C). Correlativamente per ciascun punto P_{ik} o P'_{ik} passano 4 rette h'; le tre coppie di piani opposti, che le congiungono due a due, sono coppie di facce di (A) (B) e (C). Da tutto ciò si vede, che se invece di prendere (A) come tetraedro fondamentale pigliamo (B) o (C), le rette h ed h' restano le stesse, e perciò restano gli stessi i punti P_{ik} e P'_{ik}, e i piani Π_{ik} e Π'_{ik}. Chiamando con $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$, $\beta_1 \beta_2 \beta_3 \beta_4$, $\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4$ le facce opposte ai punti $A_1 A_2 A_3 A_4$, $B_1 B_2 B_3 B_4$, $C_1 C_2 C_3 C_4$ nei tre tetraedri (A) (B) e (C) abbiamo il seguente quadro di punti P_{ik} P'_{ik} e delle rette h'. È semplicissimo d'ottenere da questo il quadro delle rette h e dei piani Π_{ik} e Π'_{ik}, basta scambiare P_{ik} P'_{ik} con Π_{ik} e Π'_{ik} e le lettere greche in majuscole latine e viceversa.

Quadro Q

per P_{12}	passano gli spigoli	A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2	e le rette h'	$\alpha_4\beta_3\gamma_3$, $\alpha_4\beta_4\gamma_4$, $\alpha_3\beta_4\gamma_3$, $\alpha_3\beta_3\gamma_4$
P'_{12}	»	A_1A_2, B_3B_4, C_3C_4	»	$\alpha_4\beta_2\gamma_2$, $\alpha_4\beta_1\gamma_1$, $\alpha_3\beta_2\gamma_2$, $\alpha_3\beta_1\gamma_2$
P_{34}	»	A_3A_4, B_1B_2, C_3C_4	»	$\alpha_1\beta_3\gamma_2$, $\alpha_1\beta_4\gamma_1$, $\alpha_2\beta_4\gamma_2$, $\alpha_2\beta_3\gamma_1$
P'_{34}	»	A_3A_4, B_3B_4, C_1C_2	»	$\alpha_1\beta_2\gamma_3$, $\alpha_1\beta_1\gamma_4$, $\alpha_2\beta_2\gamma_4$, $\alpha_2\beta_1\gamma_3$
P_{14}	»	A_1A_4, B_1B_4, C_2C_3	»	$\alpha_3\beta_3\gamma_4$, $\alpha_3\beta_2\gamma_1$, $\alpha_2\beta_2\gamma_4$, $\alpha_2\beta_3\gamma_1$
P'_{14}	»	A_1A_4, B_2B_3, C_1C_4	»	$\alpha_3\beta_1\gamma_2$, $\alpha_3\beta_4\gamma_3$, $\alpha_2\beta_4\gamma_2$, $\alpha_2\beta_1\gamma_3$
P_{23}	»	A_2A_3, B_1B_4, C_1C_4	»	$\alpha_1\beta_3\gamma_2$, $\alpha_1\beta_2\gamma_3$, $\alpha_4\beta_2\gamma_2$, $\alpha_4\beta_3\gamma_3$
P'_{23}	»	A_2A_3, B_2B_3, C_2C_3	»	$\alpha_1\beta_1\gamma_4$, $\alpha_1\beta_4\gamma_1$, $\alpha_4\beta_1\gamma_1$, $\alpha_4\beta_1\gamma_2$
P_{13}	»	A_1A_3, B_1B_3, C_1C_3	»	$\alpha_2\beta_4\gamma_2$, $\alpha_2\beta_2\gamma_4$, $\alpha_4\beta_4\gamma_4$, $\alpha_4\beta_2\gamma_2$
P'_{13}	»	A_1A_3, B_2B_4, C_2C_4	»	$\alpha_2\beta_1\gamma_3$, $\alpha_2\beta_3\gamma_1$, $\alpha_4\beta_1\gamma_1$, $\alpha_4\beta_3\gamma_3$
P_{24}	»	A_2A_4, B_1B_3, C_2C_4	»	$\alpha_1\beta_2\gamma_3$, $\alpha_1\beta_4\gamma_1$, $\alpha_3\beta_2\gamma_1$, $\alpha_3\beta_4\gamma_3$
P'_{24}	»	A_2A_4, B_2B_4, C_1C_3	»	$\alpha_1\beta_3\gamma_2$, $\alpha_1\beta_1\gamma_4$, $\alpha_3\beta_1\gamma_2$, $\alpha_3\beta_3\gamma_4$

Teorema III. Projettando dagli spigoli del tetraedro (A) il punto B_1 sugli spigoli opposti otteniamo 6 punti P_{ik} tali che P_{12} per es. giace in $A_1 A_2$. Di questi 6 punti trovando i conjugati armonici, rispetto ai vertici del tetraedro (A) si ottengono altri 6 punti P'_{ik}, che sono situati nel piano $B_2B_3B_4$ e che chiamo piano polare di B_1 rispetto al tetraedro (A). Le facce di uno dei tetraedri (A) (B) e (C) sono i piani polari dei vertici opposti rispetto agli altri due.

Un gruppo di tetraedri (A) (B) e (C) lo chiamo *terna di tetraedri fasciali,* due tetraedri, che formano con un terzo una tale terna li chiamo *complementari.*

Teorema IV. I 18 spigoli dei tre tetraedri (A) (B) (C) s'incontrano tre a tre nei 12 punti $P_{ik}\,P'_{ik}$. Questi sono situati 3 a 3 in 12 piani $\Pi_{ik}\,\Pi'_{ik}$, che formano la figura correlativa di quella di P_{ik}, P'_{ik}. I piani Π_{ik}, Π'_{ik} passano due a due per ognuno dei 18 spigoli, formando un gruppo armonico con le due facce di (A) o (B) o (C), che s'incontrano in quello spigolo. Per ciascun punto $P_{ik}\,P'_{ik}$ passano 4 rette h', mentre nei piani Π_{ik} e Π'_{ik} sono situate 4 rette h e tre spigoli dei tre tetraedri (A) (B) (C). I piani $\Pi_{ik}\,\Pi'_{ik}$ sono quelli, che projettano per es. dagli spigoli di (A) i vertici degli altri due (B) e (C). I punti $P_{ik}\,P'_{ik}$ sono i punti d'intersezione per es. degli spigoli di (A) con le facce dei due tetraedri (B) e (C).

Teorema V. Se un piano passa per un punto, il tetraedro fasciale del piano rispetto al tetraedro di riferimento è circoscritto al tetraedro fasciale del punto.

Infatti se (y_1, y_2, y_3, y_4) è situato nel piano

$$a_1\,x_1 + a_2\,x_2 + a_3\,x_3 + a_4\,x_4 = 0$$

il punto

$$-y_1, -y_2, y_3, y_4,$$

è situato in

$$-a_1\,x_1 - a_2\,x_2 + a_3\,x_3 + a_4\,x_4 = 0 \quad \text{ecc.}$$

3. Ritorniamo alla figura dei tre tetraedri (A) (B) e (C).

Possiamo separare i punti P_{ik} e P'_{ik} in tre tetraedri cioè:

$$P_{12}\,P'_{12}\,P_{34}\,P'_{34},\ P_{13}\,P'_{13}\,P_{24}\,P'_{24},\ P_{14}\,P'_{14}\,P_{23}\,P'_{23}$$

Le facce di questi tre tetraedri sono:

$$\Pi_{12}\,\Pi'_{12}\,\Pi_{34}\,\Pi'_{34},\ \Pi_{13}\,\Pi'_{13}\,\Pi_{24}\,\Pi'_{24},\ \Pi_{14}\,\Pi'_{14}\,\Pi_{23}\,\Pi'_{23}$$

Gli spigoli di essi sono quelli di (A) (B) e (C), essendo $P_{12}P'_{12} \equiv A_1A_2$, $P_{34}P'_{34} \equiv A_3A_4$, $P_{12}P_{34} \equiv B_1B_2$, $P'_{12}P'_{34} \equiv C_1C_2$, $P_{12}P_{34} \equiv B_3B_4$, $P'_{12}P_{34} \equiv C_3C_4$ ecc. (Vedi quadro Q, n. 2)

Teorema VI. I 12 punti P_{ik}, P'_{ik} formano 3 tetraedri fasciali di una 2ª terna, cioè $P_{12}P'_{12}P_{34}P'_{34} \equiv (P')$, $P_{13}P'_{13}P_{24}P'_{24} \equiv (P'')$, $P_{14}P'_{14}P_{23}P'_{23} \equiv (P''')$. Le facce di essi sono i piani Π_{ik} e Π'_{ik}, cioè $\Pi_{12}\Pi'_{12}\Pi_{34}\Pi'_{34}$ ecc. Mentre i 6 punti P'_{ik} sono situati nel piano $B_2B_3B_4$ (Teorema III), i 6 piani Π_{ik} s'incontrano nel punto B_1. Le rette, che congiungono tre a tre i vertici dei tre tetraedri $(P')(P'')(P''')$ sono le 16 rette h', mentre le facce Π_{ik}, Π'_{ik} s'incontrano tre a tre nelle 16 rette h. Chiamo questa 2ª terna di tetraedri la conjugata della 1ª, tutte e due insieme formano una sestupla fondamentale. I tetraedri della 1ª e 2ª terna hanno gli spigoli comuni.

L'equazioni dei piani del tetraedro $P_{12}P'_{12}\ P_{34}P'_{34}$ sono:

$$x_1 \mp x_2 = 0 \qquad x_3 \mp x_4 = 0$$

Le formole di trasformazione fra questo e il tetraedro (A) sono:

(1) $$x'_1 = x_1 + x_2,\ x'_2 = x_1 - x_2,\ x'_3 = x_3 + x_4,\ x'_4 = x_3 - x_4$$

(2) $$x_1 = x'_1 + x'_2,\ x_2 = x'_1 - x'_2,\ x_3 = x'_3 + x'_4,\ x_4 = x'_3 - x'_4$$

4. Sia data la terna di spigoli opposti A_1A_2, A_3A_4; B_1B_4, B_2B_3; C_2C_4, C_1C_3 oppure la terna A_1A_2, A_3A_4; B_1B_3, B_2B_4; C_1C_4, C_2C_3, gli spigoli di esse non s'incontrano, perchè gli spigoli B_1B_4, B_2B_3 si appoggiano sui due spigoli A_1A_4, A_2A_3 nei punti $P_{14}P'_{14}P_{23}P'_{23}$ (Vedi quadro Q, n. 2) e quindi non possono incontrare gli spigoli A_1A_2, A_3A_4. — Lo stesso succede di C_1C_3, C_2C_4. — Ogni coppia di spigoli dei tetraedri della 1ª o 2ª terna dà luogo a due tali terne dunque:

Teorema VII. Le 9 coppie di spigoli opposti dei tetraedri della sestupla fondamentale si separano in 6 terne, nelle quali due spigoli qualunque non s'incontrano. I 18 spigoli s'incontrano solamente tre a tre nei vertici dei 6 tetraedri della sestupla e tre a tre, sono situati nelle loro facce.

5. Date 4 sfere di centri $A_1A_2A_3A_4$, esse hanno 6 centri di similitudine interni $P_{12}P_{13}P_{14}\ P_{34}P_{24}P_{23}$ e 6 centri di similitudine esterni $P'_{12}P'_{13}P'_{14}P'_{34}P'_{24}P'_{23}$. Ora si sa che questi 12 punti giacciono 3 a 3 in 16 rette h' cioè:

$$P'_{12}P'_{13}P'_{23};\ P'_{24}P'_{14}P'_{12};\ P'_{34}P'_{14}P'_{13};\ P'_{34}P'_{24}P'_{23} \text{ ecc.}$$

le quali formano precisamente un quadro analogo a quello Q n. 2. Si sa anche, che in ogni faccia del tetraedro dei 4 centri $A_1A_2A_3A_4$ delle 4 sfere, sono situati 6 dei centri di similitudine, cioè per es. in $A_1A_2A_3$ sono situati i centri $P_{12}P_{13}P_{23}P'_{12}$ $P'_{13}P'_{23}$; inoltre si sa che $P_{12}P'_{12}$ per es. formano una coppia armonica con A_1A_2 [1] ecc.

[1] Vedi Poncelet, *Traité des prop. projectives des figures.* 1ère partie p. 409-410, 1822 e Geiser, *Enleitung in die synthetische Geometrie*, 1869.

Ora come è facile di vedere, l'insieme dei centri di similitudine di 4 sfere è identico a quello studiato precedentemente; onde possiamo applicare a questo caso i teoremi già trovati e quelli che troveremo. Osservo che i vertici dei tetraedri (B) e (C) possono essere anche essi considerati, come vertici di 4 sfere, il cui sistema di centri di similitudine è egualmente dato dai punti P_{ik} e P'_{ik}. Analogamente possono essere considerati i vertici dei tre tetraedri della 2ª terna (P') (P'') (P''') come centri di 4 sfere, i cui centri di similitudine sono i vertici dei tetraedri della 1ª terna, dunque:

Teorema VIII. I vertici $A_1 A_2 A_3 A_4$ del tetraedro (A), e quelli di (B) e (C) sono centri di 3 gruppi di 4 sfere, il cui sistema di centri di similitudine è dato dai punti P_{ik} e P'_{ik}. — Analogamente per i tetraedri della 2ª terna — Dato un sistema di centri di similitudine, ci sono 3 gruppi di 4 sfere, che hanno quel sistema in comune.

6. Abbiansi due tetraedri (B) e (B_1) fasciali con un tetraedro (A), ma non complementari, i loro vertici abbiano per coordinate:

$$y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4;\ y_1, -y_2, -y_3, y_4; -y_1, -y_2, y_3, y_4; -y_1, y_2 -y_3, y_4$$

$$y'_1, y'_2, y'_3, y'_4;\ y'_1, -y'_2, -y'_3, y'_4; -y'_1, -y'_2, y'_3, y'_4; -y'_1, y'_2, -y'_3, y'_4$$

Questi due tetraedri sono iperboloidici in 4 maniere differenti (vedi n. 32, Mem. Iª) e i 4 iperboloidi da essi generati appartengono ad un fascio ed hanno il tetraedro (A) come conjugato. Essi passano anche pei vertici dei due tetraedri complementari (C) (C_1). Abbiamo pure visto che (B) (C_1) e (B_1) (C) determinano altri 4 iperboloidi, che appartengono al medesimo fascio, dunque:

Teorema IX. Due tetraedri (B) e (B_1) fasciali con un tetraedro dato (A), ma non complementari, sono iperboloidici in 4 maniere differenti. I 4 iperboloidi, così ottenuti formano un fascio ed hanno il tetraedro (A) come conjugato. I due tetraedri (C) e $C_1)$ complementari ai primi danno luogo ai medesimi 4 iperboloidi. Considerando le coppie (C) (B_1) e (C_1) (B) si ottengono altri 4 iperboloidi, che appartengono al medesimo fascio.

7. L'equazione di una superficie di 2° grado, circoscritta al tetraedro fondamentale, è della forma:

$$\Sigma\ a_{12}\ x_1\ x_2 = 0$$

Se in essa devono essere situati i tre punti

$$y_1, y_2, y_3, y_4; -y_1 -y_2, y_3, y_4; -y_1, y_2 -y_3, y_4,$$

si ha:

$$(1)\qquad \begin{array}{cccccc} + a_{12} y_1 y_2 & + a_{13} y_1 y_3 & + a_{23} y_2 y_3 & + a_{14} y_1 y_4 & + a_{24} y_2 y_4 & + a_{34} y_3 y_4 = 0 \\ + & - & - & - & - & + \\ - & + & - & - & + & - \end{array}$$

donde

$$a_{12} y_1 y_2 + a_{13} y_1 y_3 - a_{23} y_2 y_3 - a_{14} y_1 y_4 + a_{24} y_2 y_4 + a_{34} y_3 y_4 = 0$$

cioè la superficie contiene anche in tal caso il punto $y_1, -y_2, -y_3, y_4$, dunque:

Teorema X. Se una superficie di 2° ordine passa pei tre vertici di un tetraedro fasciale con un tetraedro in essa inscritto, essa passa anche pel 4° vertice.

Ora vediamo se dato un tetraedro qualunque inscritto in una superficie di 2° ordine è possibile di trovarne un altro inscritto nella medesima e che sia fasciale col dato. Abbiamo allora da determinare i rapporti $\frac{y_1}{y_4}, \frac{y_2}{y_4}, \frac{y_3}{y_4}$ dalle tre equazioni (1), ciò che è possibile. Il tetraedro complementare sarà evidentemente conjugato rispetto alla superficie, dunque:

Teorema XI. In una superficie di 2° ordine c'è sempre in generale un tetraedro (B) ed uno solo, fasciale con un tetraedro dato (A) e pure inscritto nella superficie. Il tetraedro (C) complementare di (B) è un tetraedro conjugato della superficie.

Se si considerano i piani tangenti nei vertici di (B) alla superficie, questi formano un tetraedro, pure fasciale con (C) (Vedi Teor. V), dunque:

Teorema XII. Il tetraedro formato dai piani tangenti nei vertici del tetraedro (B) alla superficie di 2° ordine (Teor. XI) è pure fasciale con (C). Il tetraedro inscritto e il tetraedro circoscritto sono iperboloidici in 4 maniere differenti (Vedi Teor. XI) [1].

8. Se è data una superficie di 2° grado

$$a_x^2 = 0 \tag{1}$$

e un tetraedro qualunque (A), che supponiamo sia il tetraedro fondamentale, e se vogliamo, che i piani polari di un punto $y_1 y_2 y_3 y_4$ rispetto alla superficie ed al tetraedro coincidano, si deve avere:

$$a_y a_1 y_1 = a_y a_4 y_4,\ a_y a_2 y_2 = a_y a_4 y_4,\ a_y a_3 y_3 = a_y a_4 y_4 \tag{2}$$

Come si vede le 3 equazioni (2) rappresentano 3 superficie di 2° ordine, che s'incontrano in 8 punti, le coordinate di questi soddisferanno evidentemente alle 3 equazioni (2). Questi sono dunque gli 8 punti, che hanno lo stesso piano polare rispetto alla superficie e rispetto al tetraedro. Se il tetraedro (A) primitivo dato è conjugato rispetto alla superficie, le tre equazioni (2) diventano:

$$a_4 y_1^2 = a_4 y_4^2,\ a_2 y_2^2 = a_4 y_4^2,\ a_3 y_2^2 = a_4 y_4^2 \tag{2^a}$$

ed allora si ottengono 8 punti, che formano col tetraedro dato due tetraedri (B) e (C) fasciali complementari. Questi tetraedri sono pure conjugati rispetto alla superficie di 2° ordine.

I tetraedri (A) (B) (C) formano una terna analoga a quella da noi studiata, essi sono conjugati rispetto alla superficie (2^a). Se poniamo $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 1$ la superficie (2^a) diventa

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0 \qquad (2^b) \ldots\ S$$

Gli spigoli opposti di (A) (B) (C) sono conjugati rispetto ad S, dunque i tetraedri (P′) (P″) (P‴) della 2^a terna sono pure conjugati rispetto ad S. Dato adunque un tetraedro conjugato qualunque (A) rispetto ad una superficie di 2° ordine S, esso determina una ed una sola sestupla di tetraedri fasciali, gli altri 5 determinano alla lor volta la stessa sestupla. Se la superficie S è reale allora due soli dei 6 tetraedri

[1] Chasles nell'*Aperçu historique « sur les théorèmes analogues des théorèmes de Pascal et Brianchon »* dice che tali tetraedri sono iperboloidici, ma in una sola maniera, cioè che i vertici del tetraedro inscritto e i punti d'incontro dei piani tangenti negli altri tre, sono situati in 4 generatrici di un iperboloide.

possono essere reali se invece è immaginaria, essendo il suo sistema polare interamente reale allora se il primo è reale gli altri sono tutti reali.

Teorema XIII. Data una superficie S di 2° grado e un tetraedro qualunque (A) ci sono 8 punti, i quali hanno lo stesso piano polare rispetto ad S ed al tetraedro (A). Se il tetraedro (A) è conjugato rispetto alla superficie, gli 8 punti formano due tetraedri (B) e (C) conjugati rispetto ad S e fasciali complementari rispetto ad (A). (A) (B) (C) e (P′) (P″) (P‴) sono conjugati rispetto ad S. Ogni tetraedro conjugato rispetto ad S dà luogo ad una tale sestupla di tetraedri conjugati rispetto ad S; se S è reale due soli dei 6 tetraedri possono essere reali, se invece la S è immaginaria, ma ha il suo sistema polare interamente reale, se uno dei tetraedri è reale, lo sono anche gli altri 5.

Supponiamo data la $S \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$ e il tetraedro y_1, y_2, y_3, y_4; $y_1, -y_2, -y_3, y_4$; $-y_1, -y_2, y_3, y_4$; $-y_1, y_2 -y_3, y_4$ fasciale col tetraedro di riferimento. Il tetraedro polare reciproco del primo rispetto alla S è pure un tetraedro fasciale col tetraedro di riferimento, donde:

Teorema XIV. Se di un tetraedro (B) fasciale con un tetraedro (A) conjugato rispetto ad una superficie di 2° ordine S, si costruisce il tetraedro polare reciproco (B), esso è pure fasciale con (A) ed è quindi iperboloidico in 4 maniere differenti col tetraedro (B) [1] (Teor. IX).

9. Ritorniamo alla figura delle due terne (A) (B) (C) e (P′) (P″) (P‴). Abbiasi una retta h cioè $A_1 B_1 C_4$; $B_1 C_4$ sono divisi armonicamente dal vertice A_1 e dal punto A'_1 d'incontro della retta h con la faccia opposta α_1. Analogamente i punti $B'_1 C'_4$ d'incontro di h con le facce β_1 e γ_4 di (B) e (C) sono i conjugati armonici di B_1 e C_4 rispetto ad $A_1 C_4$ e $A_1 B_1$. Sulla retta h si ha adunque l'involuzione $A_1 B_1 C_4$, $A'_1 B'_1 C'_4$, i cui due punti doppî immaginarî E′, formano coi primi tre punti o con gli altri tre un gruppo equianarmonico. Lo stesso succede per i tre piani $\alpha_1 \beta_1 \gamma_4$, che passano per la retta h' corrispondente alla retta $A_1 B_1 C_4$; vale a dire si ha intorno ad h' un'involuzione di piani $\alpha'_1 \beta'_1 \gamma'_4$, $\alpha_1 \beta_1 \gamma_4$, che contengono rispettivamente i punti $A'_1 B'_1 C'_4$, $A_1 B_1 C_4$. I piani doppî e di quest' involuzione passano evidentemente per i punti E di h. Analogamente sulle rette h' abbiamo due punti immaginarî E′ e intorno alle rette h due piani immaginarî e'.

Le coordinate dei punti della retta $A_1 B_1 C_4$ sono

$$x_1 = 1 + \lambda_1 ,\ x_2 = 1 ,\ x_3 = 1,\ x_4 = 1$$

ove λ un parametro. Il punto A_1 si ottiene ponendo $\lambda = \infty$, B_1 si ottiene ponendo $\lambda = 0$ e per C_4 basta porre $\lambda = -\frac{1}{2}$ (vedi n. 1). Per i punti doppî dell'involuzione $A_1 B_1 C_4$, $A'_1 B'_1 C'_4$ si ha:

$$\lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} \quad .$$

[1] Chasles nell'*Aperçu historique* l.c. dimostra che due tetraedri polari reciproci qualunque rispetto ad una superficie di 2° ordine sono in generale iperboloidici in una sola maniera.

ossia le coordinate di essi sono:

$$x_1 = \pm\sqrt{-3} \quad x_2 = x_3 = x_4 = 1$$

Un punto della retta $h' \equiv P'_{23} P'_{34} P'_{24}$ corrispondente alla $A_1 B_1 C_4$ ha per coordinate:

$$0, -1, 1+\lambda, -\lambda$$

I punti E ed E' sono situati sulla superficie S (Teor. XIII) ossia $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$, dunque il λ dei due punti E'

è
$$\lambda = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

e perciò le coordinate dei punti E' sono:

$$0, \quad -2, \quad 1 \pm i\sqrt{3}, \quad -(1 \pm i\sqrt{3})$$

Teorema XV. Se in una retta h per es. nella $A_1 B_1 C_4$, di ciascuno dei tre vertici si determina il conjugato armonico rispetto agli altri due, si ottengono i tre punti $A'_1 B'_1 C'_4$ d'incontro con le facce opposte ad $A_1 B_1 C_4$ nei tetraedri (A) (B) (C). In ogni retta h ci sono due punti immaginarî E, punti doppî dell'involuzione $A_1 B_1 C_4$, $A'_1 B'_1 C'_4$. Analogamente se dei tre piani $A_2 A_3 A_4$, $B_2 B_3 B_4$, $C_2 C_3 C_4$, che s'incontrano nella h' corrispondente di h, si determinano i conjugati armonici rispetto agli altri due si ha un'involuzione i cui piani doppî e passano pei punti E di h. In ogni retta h' si hanno invece due punti E' e intorno ad ogni retta h due piani e' immaginarî.

Per ottenere sulla retta h i punti A'_1 e B'_1 basta porre $\lambda = -1$ e $\lambda = -4$ sapendo ch'essi sono i punti d'incontro di h coi piani $x_1 = 0$ e $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ Donde:

$$(A_1\, B_1\, A'_1\, B'_1) = 4 = \text{cost.}$$

Teorema XVI. Il rapporto anarmonico dato da uno dei vertici di un tetraedro (A), dal suo piano opposto, da un punto qualunque B_1 e dal suo piano polare rispetto ad (A), è costante.

10. Abbiamo visto nella I^a Memoria, teor. LXXXVIII, che sopra ogni spigolo $A_i A_k$ di (A) c'è un'altra coppia di punti $P^i_{ik} P^{i'}_{ik}$ immaginarî, i quali dividono armonicamente la coppia $A_i A_k$ e $P_{ik} P'_{ik}$. In tutto abbiamo 18 coppie di punti $P^i_{ik} P^{i'}_{ik}$. Le due coppie $P^i_{12} P^{i'}_{12} P^i_{34} P^{i'}_{34}$ formano un tetraedro F, di cui due spigoli sono reali e 4 spigoli I immaginarî. Così abbiamo gli analoghi tetraedri $P^i_{13} P^{i'}_{13} P^i_{24} P^{i'}_{24}$, $P^i_{14} P^{i'}_{14} P^i_{23} P^{i'}_{23}$. Per ogni tetraedro (A) (B) (C) otteniamo tre di questi tetraedri, o per meglio dire ne otteniamo uno per ogni coppia di spigoli opposti dei 6 tetraedri della sestupla fondamentale, ossia in tutto 9.

Consideriamo le 4 superficie armoniche (Vedi Mem. I^a n. 31)

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 &= 0 \equiv S \\ -x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 &= 0 \equiv S_1 \\ -x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + x_4^2 &= 0 \equiv S_2 \\ x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + x_4^2 &= 0 \equiv S_3 \end{aligned} \qquad (1)$$

La S ha per tetraedri conjugati i 6 tetraedri della sestupla (Teor. XIII), rispetto ad essa sono conjugate le rette $h\,h'$ corrispondenti, essa passa per i punti E E′ di esse ivi toccando i piani e ed e', passa per i punti P^{i}_{ik} $P^{i'}_{ik}$ dei 18 spigoli, dei tetraedri della sestupla, onde contiene tutti gli spigoli immaginarî I dei tetraedri F. Mediante la trasformazione (2) n. 1 le S S_1 riferite al tetraedro (B) hanno per equazioni:

$$\begin{aligned} x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 + x_4'^2 = 0 &\equiv S \\ x'_1 x'_2 + x'_3 x'_4 = 0 &\equiv S_1 \end{aligned} \tag{2}$$

La S_1 adunque passa per le coppie di spigoli $B_1\,B_3$, $B_2\,B_4$; $B_1\,B_4$, $B_2\,B_3$. — Lo stesso avviene se adoperiamo la trasformazione fra (A) e (C), cioè la S_1 passa anche per due coppie di spigoli di (C). La S_1 passa per le 2 coppie di rette I del tetraedro $P^{i}_{12}\,P^{i'}_{12}$ $P^{i}_{3i}\,P^{i'}_{34}$, come si scorge da (1). Una di queste coppie si appoggia evidentemente ad una coppia di spigoli di (B) e ad una di (C), oltre che appoggiarsi ad una coppia di spigoli di (A); dunque se ne conclude che le coppie di rette I sono solamente 6, ogni coppia di esse si appoggia sugli spigoli di una terna di coppie di spigoli, che non s'incontrano (Teor. VII).

Teorema XVII. Sopra uno qualunque dei 18 spigoli della sestupla fondamentale, per es. $A_1\,A_2$, ci sono due punti immaginarî $P^{i}_{12}\,P^{i'}_{12}$, che dividono armonicamente la coppia di punti $P_{12}\,P'_{12}$ e $A_1\,A_2$ — I 36 punti P^{i}_{ik} $P^{i'}_{ik}$ sono situati 6 a 6 in 6 coppie di rette immaginarie I, che s'appoggiano ciascuna ad una delle 6 terne di coppie di spigoli, che non s'incontrano (Teor. VII).

Teorema XVIII. Con le due coppie di punti $P^{i}_{ik}\,P^{i'}_{ik}$ situate in due spigoli opposti per es. di (S), si forma un tetraedro F, che ha due spigoli reali e 4 rette I, come spigoli immaginarî. I tetraedri F sono 9 (¹)

Teorema XIX. Le 6 coppie di rette I sono situate sulla superficie S, che ha i 6 tetraedri della sestupla fondamentale come conjugati. — La S passa per i punti E ed E′ delle rette h ed h' ed ha in essi per piani tangenti i piani e ed e'. Le rette $h\,h'$ corrispondenti sono conjugate rispetto alla S.

11. Abbiamo visto che l'iperboloide S_1 cioè

$$-x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$$

passa per due coppie di spigoli di (B) e di (C) e per due coppie di rette immaginarie I. Lo stesso accade per i due iperboloidi S_2 S_3. — La superficie S riferita a (B) si mette sotto la forma

$$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 + x_3'^2 = 0$$

i tre iperboloidi che con essa formano rispetto a (B) un gruppo di superficie armoniche sono

$$\begin{aligned} -x_1'^2 - x_2'^2 + x_3'^2 + x_4'^2 &= 0 \\ -x_1'^2 + x_2'^2 - x_3'^2 + x_4'^2 &= 0 \\ x_1'^2 - x_2'^2 - x_3'^2 + x_4'^2 &= 0\,. \end{aligned}$$

(¹) La figura formata dai 6 tetraedri (A) (B) (C) (P′) (P″) (P‴) e dai 9 tetraedri F è precisamente quella ottenuta da Klein considerando 6 complessi lineari in involuzione. Le 15 coppie di spigoli opposti di questi tetraedri rappresentano le direttrici delle congruenze date dai 6 complessi due a due. Math. Ann. Vol. II.

Le loro equazioni rispetto ad (A) [n. 1. (1)] sono precisamente

$$x_1 x_2 + x_3 x_4 = 0 \equiv S_4$$
$$x_1 x_3 + x_2 x_4 = 0 \equiv S_5$$
$$x_1 x_4 + x_2 x_3 = 0 \equiv S_6$$

Queste superficie riferite invece al tetraedro (C), si mettono sotto la medesima forma; ciò dunque fa vedere, che passano per due coppie di spigoli di (A) e per due di (C). Se riferiamo la S al tetraedro (C) la sua equazione è della forma

$$x_1''^2 + x_2''^2 + x_3''^2 + x_4''^2 = 0$$

i tre iperboloidi, che con essa formano un gruppo di superficie armoniche rispetto a (C) riferite ad (A), hanno per equazioni

$$x_1 x_2 - x_3 x_4 = 0 \equiv S_7$$
$$x_1 x_3 - x_2 x_4 = 0 \equiv S_8$$
$$x_1 x_4 - x_2 x_3 = 0 \equiv S_9.$$

Questi passano per due coppie di spigoli di (A) e per due coppie di spigoli di (B) e per due coppie di rette immaginarie I. L'iperboloide

$$x_1 x_2 - x_3 x_4 = 0$$

passa per gli spigoli $A_1 A_3$, $A_2 A_4$; $A_1 A_4$, $A_2 A_3$; $B_1 B_3$ $B_2 B_4$; $B_1 B_4$, $B_2 B_3$; questi sono anche gli spigoli $P_{13} P'_{13}$, $P_{24} P'_{24}$; P_{13} P_{24}; P'_{13} P'_{24}; P_{14} P'_{14}, $P_{23} P'_{23}$; $P_{14} P_{23}$ $P'_{14} P'_{23}$ dei due tetraedri (P'') e (P'''), esso ha dunque per conjugato il tetraedro (C) e il tetraedro (P').

Teorema XX. Per due coppie di spigoli opposti di due tetraedri di una terna per es. (B) e (C) passa un iperboloide S_1, che ha il tetraedro (A) come conjugato. Esso passa anche per due coppie di spigoli opposti di due tetraedri della 2ª terna (sono gli stessi dei primi) e ha il terzo tetraedro come conjugato. Esso contiene pure due coppie di rette I, che formano un quadrangolo gobbo, e che congiungono 4 a 4 i punti P'_{ik} P''_{ik} degli spigoli di (B) e di (C), che giaciono in S_1.

Teorema XXI. Per le tre coppie di spigoli opposti di un tetraedro della sestupla per es. di (A) si ottengono 6 iperboloidi S_4 S_5 S_6 S_7 S_8 S_9 in modo che $S_4 S_7$, $S_5 S_8$, $S_6 S_9$ s'incontrano in due coppie di spigoli opposti di (A). Gli altri due tetraedri (B) e (C) danno luogo ad altri tre iperboloidi S_1 S_2 S_3, che hanno il tetraedro (A) come conjugato. Uno qualunque di questi 9 iperboloidi ha due tetraedri della sestupla come conjugati e contiene 4 rette I, spigoli di un tetraedro F. Due iperboloidi qualunque s'incontrano in due dei 18 spigoli dei tetraedri fondamentali e in due rette I.

Siccome le coppie di spigoli $A_1 A_3$, $A_2 A_4$; $B_1 B_3$, $B_2 B_4$ che non s' incontrano e che sono situate sulla superficie.

$$x_1 x_2 - x_3 x_4 = 0$$

formano un gruppo armonico, perchè le rette $B_1 B_3$, $B_2 B_4$, incontrano le rette $A_1 A_3$, $A_2 A_4$ nei unti P_{13} P'_{13} P_{24} P'_{24}, così:

Teorema XXII. Le due coppie di spigoli di due tetraedri di una delle terne, situate in uno dei 9 iperboloidi e che non s'incontrano, formano un gruppo armonico.

Da ciò che si è detto si ha pure che $SS_1 S_4 S_7$, $SS_2 S_5 S_8$, $SS_3 S_6 S_9$ formano tre gruppi di superficie armoniche rispetto ai tetraedri della 2ª terna.

Teorema XXIII. Le 4 delle 10 superficie $S\ S_1\ S_2 \ldots S_9$, che sono coniugate rispetto ad un tetraedro della sestupla fondamentale, formano un gruppo di superficie armoniche (Vedi n. 32 Mem. Iª). Rispetto ai 6 tetraedri della sestupla fondamentale esse formano 6 gruppi di 4 superficie armoniche a ciascuno dei quali appartiene la S.

12. Le coordinate dei vertici del tetraedro immaginario $P'_{12}\,P''_{12}\ P'_{34}\,P''_{34}$ sono rispetto ad (A) come tetraedro di riferimento $(1\,i\,0\,0)$, $(1\,-i\ 0\ 0)$, $(0\ 0\ 1\ i)$, $(0\ 0\ 1\,-i)$ e le sue facce sono:

$$x_1 \pm i x_2 = 0 \qquad x_3 \pm i x_4 = 0$$

onde le formole di trasformazione fra questo tetraedro ed (A) sono:

$$x'_1 = x_1 + i x_2, \quad x'_2 = x_1 - i x_2, \quad x'_3 = x_3 + i x_4, \quad x'_4 = x_3 - i x_4. \quad (1)$$

Analoghe formole otteniamo per gli altri due tetraedri F, che si formano con le coppie di punti $P'_{ik}\ P''_{ik}$, situate sulle coppie $A_1 A_3$, $A_2 A_4$; $A_1 A_4$, $A_2 A_3$ di (A). Fra il tetraedro (A) e il tetraedro $P'_{12}\,P''_{12}\ P'_{34}\,P''_{34}$ di (B) si hanno invece le seguenti formole di trasformazione, come è facile di verificare.

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1(1-i) + x_2(1-i) + x_3(1+i) + x_4(1+i) \\ x'_2 &= x_1(1+i) + x_2(1+i) + x_3(1-i) + x_4(1-i) \\ x'_3 &= -x_1(1+i) + x_2(1+i) - x_3(1-i) + x_4(1-i) \\ x'_4 &= -x_1(1-i) + x_2(1-i) - x_3(1-i) + x_4(1-i). \end{aligned} \qquad (2)$$

Analogamente si ottengono le formole di trasformazione fra (A) e gli altri tetraedri F di (B) e (C).

13. Ora consideriamo uno degli iperboloidi $S_1 \ldots S_9$ per es. S_9 cioè

$$x_1\,x_2 - x_3\,x_4 = 0$$

esso, come si è visto, passa per gli spigoli $A_1 A_3$, $A_2 A_4$, $A_1 A_4$, $A_2 A_3$; $B_1 B_3$, $B_2 B_4$, $B_1 B_4$, $B_2 B_3$. I punti $P'_{ik}\ P''_{ik}$ delle coppie rimanenti di (A) e di (B) formano adunque due tetraedri F, conjugati rispetto ad S_7; ma la S_7 passa anche per due coppie di spigoli dei tetraedri (P″) e (P‴) (n. 11), dunque è chiaro che altri due tetraedri F sono conjugati rispetto alla S_7. Essa ha pure i tetraedri (C) e (P′) come conjugati, i quali coi 4 tetraedri F suddetti formano una sestupla di tetraedri fasciali rispetto alla S_7 (Teorema XIII). Dunque:

Teorema XXIV. I 6 tetraedri della sestupla fondamentale e i 9 tetraedri F, formano altre 9 sestuple di tetraedri fasciali, rispetto alle quali le superficie $S_1 \ldots S_9$ si comportano rispettivamente come la S rispetto alla sestupla fondamentale e pel teorema XC della Mem. Iª e pel teorema XXIII di questa si ha:

Teorema XXV. Ciascuna delle 10 superficie $S S_1 \ldots S_9$ è polare reciproca di sè stessa rispetto alle altre 9.

14. Se congiungiamo i due punti P'_{12} P''_{12} dello spigolo $A_1 A_2$ con la coppia $P_{34} P'_{34}$ dello spigolo opposto $A_3 A_4$, otteniamo un tetraedro, che chiamo N. Esso ha 2 spigoli reali e 4 immaginarî. Congiungendo invece i punti P''_{12} P'_{12} con A_3 A_4 si ottiene un altro tetraedro N; per ogni coppia di spigoli si ottengono dunque 4 tetraedri N, in tutto adunque considerando anche i tetraedri F 60, onde:

Teorema XXVI. *Se si congiungono i punti P'_{ik} P''_{ik} di uno spigolo per es. $A_1 A_2$, con i punti reali P_{ik} P'_{ik} dello spigolo opposto $A_3 A_4$, oppure con i punti $A_3 A_4$ stessi, si ottiene un tetraedro N. Per tutti i 6 tetraedri di una sestupla otteniamo 36 di questi tetraedri; in tutto 60.*

15. Nel n. 32 Mem. Iª abbiamo visto che al gruppo SS_1 S_2 S_3 di 4 superficie armoniche è complementare un altro gruppo di 4 superficie a punti ellittici, e siccome le 10 superficie SS_1.... S_9 formano 6 gruppi di superficie armoniche rispetto ai 6 tetraedri della sestupla fondamentale, così abbiamo 6 gruppi di 4 superficie $\mathcal{E}$ che si riferiscono a quelli stessi 6 tetraedri. Se prendiamo in considerazione anche i 9 tetraedri F, avremo altri 9 di questi gruppi di superficie $\mathcal{E}$, dunque:

Teorema XXVII. *Ci sono rispetto ai tetraedri reali della sestupla fondamentale 6 gruppi di 4 superficie a punti ellittici $\mathcal{E}$, complementari ai 6 gruppi di superficie armoniche formati dalle 10 superficie SS_1... S_9, rispetto a quei tetraedri. In tutto il sistema si ottengono 15 gruppi di 4 superficie $\mathcal{E}$* (¹) (Teor. LXXXIX, Mem. Iª).

Le superficie $\mathcal{E}$ dei gruppi, che si riferiscono ad (A) (B) (C) riferiti al tetraedro (A) hanno l'equazioni seguenti:

$$
\text{1ª Bisestupla}\left\{\begin{array}{ll}
\text{quelle di (A)} & -x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=0\equiv\mathcal{E}_1 \\
 & x_1^2-x_2^2+x_3^2+x_4^2=0\equiv\mathcal{E}_2 \\
 & x_1^2+x_2^2-x_3^2+x_4^2=0\equiv\mathcal{E}_3 \\
 & x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_4^2=0\equiv\mathcal{E}_4 \\
\text{quelle di (B)} & \Sigma x_1^2-2\Sigma x_1x_2=0\equiv\mathcal{E}_5 \\
 & \Sigma x_1^2-2x_1x_2-2x_3x_4+2x_1x_3+2x_2x_4+2x_1x_4+2x_2x_3=0\equiv\mathcal{E}_6 \\
 & \Sigma x_1^2+2x_1x_2+2x_3x_4-2x_1x_3-2x_2x_4+2x_1x_4+2x_2x_3=0\equiv\mathcal{E}_7 \\
 & \Sigma x_1^2+2x_1x_2+2x_3x_4+2x_1x_3+2x_2x_4-2x_1x_4-2x_2x_3=0\equiv\mathcal{E}_8 \\
\text{quelle di (C)} & \Sigma x_1^2-2x_1x_2+2x_3x_4-2x_1x_3+2x_2x_4-2x_2x_3+2x_1x_4=0\equiv\mathcal{E}_9 \\
 & \Sigma x_1^2-2x_1x_2+2x_3x_4+2x_1x_3-2x_2x_4+2x_2x_3-2x_1x_4=0\equiv\mathcal{E}_{10} \\
 & \Sigma x_1^2+2x_1x_2-2x_3x_4-2x_1x_3+2x_2x_4+2x_2x_3-2x_1x_4=0\equiv\mathcal{E}_{11} \\
 & \Sigma x_1^2+2x_1x_2-2x_3x_4+2x_1x_3-2x_2x_4-2x_2x_3+2x_1x_4=0\equiv\mathcal{E}_{12}
\end{array}\right.
$$

Le ultime 8 equazioni si trovano facendo uso delle formole (1) n. 1. E così facendo uso delle formole n. 4 si hanno i tre gruppi di superficie $\mathcal{E}$ che si riferiscono

(¹) Essendo $x_1=0$ $x_2=0$ . . . $x_6=0$ i 6 complessi fondamentali le equazioni delle 10 superficie SS_1 . . . S_9 considerate anche da Klein hanno per equazioni $x_1^2+x_3^2+x_5^2\equiv x_2^2+x_4^2+x_6^2$ ecc. mentre le 60 superficie $\mathcal{E}$ che abbiamo qui incontrate hanno per equazioni $\pm x_1 x_2 \pm x_3 x_4 \pm x_5 x_6=0$ ecc.

ai tetraedri della 2ª terna, cioè

$$
\text{2ª Bisestupla}\left\{
\begin{array}{lr}
\text{per } (\mathrm{P}') & x_1^2 + x^2 \mp 2x_3\,x_4 = 0 \equiv \mathcal{E}_{13},\ \mathcal{E}_{14} \\
 & x_3^2 + x_4^2 \mp 2x_1 x_2 = 0 \equiv \mathcal{E}_{15},\ \mathcal{E}_{16} \\
\text{»}\ (\mathrm{P}'') & x_1^2 + x_3^2 \mp 2x_2\,x_4 = 0 \equiv \mathcal{E}_{17},\ \mathcal{E}_{18} \\
 & x_2^2 + x_4^2 \mp 2x_1\,x_3 = 0 \equiv \mathcal{E}_{19},\ \mathcal{E}_{20} \\
\text{»}\ (\mathrm{P}''') & x_1^2 + x_4^2 \mp 2x_2\,x_3 = 0 \equiv \mathcal{E}_{21},\ \mathcal{E}_{22} \\
 & x_2^2 + x_3^2 \mp 2x_1\,x_4 = 0 \equiv \mathcal{E}_{23},\ \mathcal{E}_{24}.
\end{array}\right.
$$

Queste 24 superficie $\mathcal{E}$, come si vede, son tutte reali. È chiaro pure che un identico sistema di equazioni, si otterrebbe riferendosi ad un altro tetraedro della sestupla fondamentale.

Mediante le formole (1) n. 14 le 4 superficie $\mathcal{E}$ che si riferiscono al tetraedro $P^{i}_{12}\,P^{i'}_{12}\,P^{i}_{34}\,P^{i'}_{34}$ di (A) hanno per equazioni:

$$
\begin{aligned}
x_1^2 + x_2^2 \mp 2i\,x_3\,x_4 = 0 \\
x_3^2 + x_4^2 \mp 2i\,x_1\,x_2 = 0
\end{aligned}
$$

E così analogamente quelle che si riferiscono agli altri due tetraedri F di (A). Quelle che invece si riferiscono al tetraedro $P^{i}_{12}\,P^{i'}_{12}\,P^{i}_{34}\,P^{i'}_{34}$ di B hanno le seguenti equazioni (2) (n. 14)

$$
\Sigma x_1^2 + 2x_1\,x_2 - 2x_3\,x_4 - 2i\,x_1\,x_3 - 2i\,x_2\,x_4 + 2i\,x_1\,x_4 + 2i\,x_2 x_3 = 0 \ \text{ecc.}
$$

Le superficie $\mathcal{E}$ dei tre gruppi dei tre tetraedri di una terna formano una bisestupla. — *Considero solamente le superficie $\mathcal{E}$ della sestupla fondamentale e chiamo 1ª bisestupla quella che si riferisce ai tetraedri della 1ª terna* (A) (B) (C) e 2ª *quella che si riferisce alla 2ª terna* (P′) (P″) (P‴).

16. Sia data una delle superficie $\mathcal{E}$ di un gruppo di uno dei 6 tetraedri della sestupla fondamentale per es. $\mathcal{E}_1$

$$
-x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0\,.
$$

Essa incontra i tre spigoli $A_1\,A_2$, $A_1\,A_3$, $A_1\,A_4$ nelle tre coppie di punti reali $P_{12}\,P'_{12}$, $P_{13}\,P'_{13}$, $P_{14}\,P'_{14}$ e gli altri spigoli nelle coppie di punti immaginarî $P^{i}_{23}\,P^{i'}_{23}\,P^{i}_{24}\,P^{i'}_{24}\,P^{i}_{34}\,P^{i'}_{34}$ onde essa passa per gli spigoli immaginarî di tre tetraedri N, cioè: $P_{12}\,P'_{12}\,P^{i}_{34}\,P^{i'}_{34}$, $P_{13}\,P'_{13}\,P^{i}_{24}\,P^{i'}_{24}$, $P_{14}\,P^{i}_{14}\,P^{i}_{23}\,P'^{i}_{23}$. Se consideriamo un'altra superficie $\mathcal{E}$ dello stesso gruppo per es. $\mathcal{E}_2$

$$
x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0
$$

si vede che essa passa pure per gli spigoli immaginarî del tetraedro $P_{12}\,P'_{12}\,P^{i}_{34}\,P^{i'}_{34}$ quindi due superficie $\mathcal{E}$ di uno stesso gruppo, s'incontrano nei 4 spigoli immaginarî di un tetraedro N (Vedi Mem. Iª, Teor. LXXXIX).

Teorema XXVIII. *Due superficie $\mathcal{E}$ di un gruppo qualunque s'incontrano nei 4 spigoli immaginarî di un tetraedro N, che ha i suoi vertici in una coppia di spigoli opposti del tetraedro, a cui si riferisce quel gruppo. In una superficie $\mathcal{E}$ qualunque sono situati i 4 spigoli immaginarî di tre tetraedri N.*

Si scorge facilmente dall'equazioni delle superficie $\mathcal{E}$ n. 15, che quelle che si riferiscono per es. a (B) e (C) toccano gli spigoli del tetraedro (A) nei punti reali

P_{ik} P'_{ik} e siccome in tal caso s'annulla l'invariante $A_{1222} = 0$ fra una $\mathcal{E}$ per es. di (B) ed una per es. di (A), si ha:

Teorema XXIX. Le superficie $\mathcal{E}$ di un gruppo della 1ª bisestupla che si riferisce per es. ad (A), toccano gli spigoli degli altri due tetraedri (B) e (C). Analogamente per le superficie della 2ª bisestupla. Ci sono infiniti tetraedri conjugati alle superficie $\mathcal{E}$ di (A) i cui spigoli toccano rispettivamente le superficie $\mathcal{E}$ di (B) e (C).

17. Considero ora invece una $\mathcal{E}$ della 2ª bisestupla per es. $\mathcal{E}_{15}$

$$x_1^2 + x_2 - 2x_3 x_4 = 0 .$$

Questa taglia i piani $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$ secondo le due coniche

$$x_2^2 = 2x_3 x_4 , \qquad x_1^2 = 2x_3 x_4$$

che toccano gli spigoli $A_1 A_3$, $A_1 A_4$ e $A_2 A_3$, $A_2 A_4$ nei punti A_3, A_4. Essa taglia invece i piani $x_3 = 0$ $x_4 = 0$ secondo due rette cioè:

$$(x_1 + ix_2)\,(x_1 - ix_2) = 0$$

le quali 4 rette passano rispettivamente per A_3 e A_4 e s'incontrano nei due punti P^{i}_{12} P'^{i}_{12} dello spigolo $A_1 A_2$; la superficie adunque tocca i piani $x_3 = 0$ $x_4 = 0$ nei punti A_3 e A_4 e i piani $x_1 \pm i\ x_2 = 0$ nei punti P^{i}_{12} e P'^{i}_{12}, dunque:

Teorema XXX. Le superficie $\mathcal{E}$ della 2ª bisestupla toccano due facce di un tetraedro qualunque della 1ª terna e tagliano le altre in due coniche, che toccano due degli spigoli, nei punti d'incontro di essi con lo spigolo, opposto a quello ove s'incontrano le due prime facce. Così per le superficie $\mathcal{E}$ della 1ª bisestupla rispetto ai tetraedri della 2ª terna.

L'invariante simultaneo A_{1222} o A_{1112} di una superficie della 1ª bisestupla ed una della 2ª è zero.

Teorema XXXI. Ci sono infiniti tetraedri conjugati di una superficie $\mathcal{E}$ per es. della 1ª bisestupla, che sono inscritti o circoscritti ad una superficie $\mathcal{E}$ qualunque della 2ª bisestupla.

La S, cioè

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$$

è reciproca di sè stessa rispetto alle 24 superficie $\mathcal{E}_1 \ldots \mathcal{E}_{24}$ (Vedi Teor. XC, Mem. Iª e Teor. XXV di questa) dunque:

Teorema XXXII. La superficie S, di una delle 10 sestuple, formate con i tetraedri reali e coi 9 tetraedri F è reciproca di sè stessa rispetto alle 24 superficie $\mathcal{E}$ delle due bisestuple, che si riferiscono alle due terne di tetraedri di quella sestupla.

La $\mathcal{E}_1$ per es.

$$-x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$$

è polare reciproca di sè stessa rispetto a 6 superficie della 2ª bisestupla cioè $\mathcal{E}_{13}$ $\mathcal{E}_{14}$ $\mathcal{E}_{17}$ $\mathcal{E}_{18}$ $\mathcal{E}_{21}$ $\mathcal{E}_{22}$

$$x_1^2 + x_2^2 \mp 2x_3 x_4 = 0$$
$$x_1^2 + x_3^2 \mp 2x_2 x_4 = 0$$
$$x_1^2 + x_4^2 \mp 2x_2 x_3 = 0 .$$

Teorema XXXIII. Una superficie $\mathcal{C}$ della 1^a (2^a) bisestupla è polare reciproca di sè stessa rispetto a 6 superficie $\mathcal{C}$ della 2^a (1^a) bisestupla.

Siccome con i 15 tetraedri fondamentali si possono formare 10 sestuple di tetraedri fasciali così colle 60 superficie $\mathcal{C}$ (Teor. XXVII) si formano 10 aggruppamenti di due bisestuple, quindi è chiaro che queste superficie $\mathcal{C}$ devono avere altre interessanti proprietà, che io tralascio di considerare.

18. Ritorniamo alla figura delle rette h (Teor. I). Con le 16 rette h si possono formare i seguenti 8 gruppi α di 4 rette

1°	$A_1 B_4 C_1$,	$A_2 B_1 C_3$,	$A_3 B_3 C_4$,	$A_4 B_2 C_2$
2°	$A_1 B_1 C_4$,	$A_2 B_3 C_1$,	$A_3 B_4 C_3$,	$A_4 B_2 C_2$
3°	$A_1 B_2 C_3$,	$A_2 B_4 C_2$,	$A_3 B_3 C_4$,	$A_4 B_1 C_1$
4°	$A_1 B_3 C_2$,	$A_2 B_1 C_3$,	$A_3 B_2 C_1$,	$A_4 B_4 C_4$
5°	$A_1 B_4 C_1$,	$A_2 B_2 C_4$,	$A_3 B_1 C_2$,	$A_4 B_3 C_3$
6°	$A_1 B_1 C_4$,	$A_2 B_4 C_2$,	$A_3 B_2 C_1$,	$A_4 B_3 C_3$
7°	$A_1 B_2 C_3$,	$A_2 B_3 C_1$,	$A_3 B_1 C_2$,	$A_4 B_4 C_4$
8°	$A_1 B_3 C_2$,	$A_2 B_2 C_4$,	$A_3 B_4 C_3$,	$A_4 B_1 C_1$

Le 4 rette h di un gruppo non s'incontrano, esse passano rispettivamente per i 4 vertici di ciascuno dei tre tetraedri (A) (B) e (C). Una retta per es. $A_1 B_4 C_1$ entra in 2 gruppi cioè nel 1°, e nel 5° dunque:

Teorema XXXIV. Le 16 rette h si dispongono in 8 gruppi α di 4 rette, che non s'incontrano. Le 4 rette h di un gruppo passano rispettivamente per i vertici dei tre tetraedri (A) (B) e (C). — Analogamente per le rette h'

Le 6 rette h, che con $A_1 B_4 C_1$ formano due gruppi α sono:

$$A_2 B_1 C_3 , \quad A_3 B_3 C_4 , \quad A_4 B_2 C_2$$
$$A_2 B_2 C_4 , \quad A_3 B_1 C_2 , \quad A_4 B_4 C_4 .$$

Queste 6 rette sono situate evidentemente in un iperboloide H, che corrisponde alla retta $A_1 B_4 C_1$.

Teorema XXXV. Ogni retta h entra in due gruppi α; le 6 rette h che con essa formano i due gruppi α determinano un iperboloide H, che corrisponde alla prima retta h. Le 6 rette h s'incontrano due a due in 9 vertici di (A) (B) (C), eccettuati quelli della prima retta h. In essi l'iperboloide H ha per piani tangenti 9 piani Π_{ik} Π'_{ik}. Ci sono 16 iperboloidi H e 16 H', che corrispondono alle 16 rette h e alle 16 rette h'. Alle 4 rette h (h') di un gruppo α (α') corrispondono 4 iperboloidi H (H') di un gruppo α (α').

Gli iperboloidi, che corrispondono alle 4 rette h, passanti per A_1, riferiti al tetraedro (A) hanno le seguenti equazioni:

$$(1) \qquad \begin{aligned} x_1^2 + x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_4 &= 0 \\ x_1^2 - x_2 x_3 + x_2 x_4 - x_3 x_4 &= 0 \\ x_1^2 - x_2 x_3 - x_2 x_4 + x_3 x_4 &= 0 \\ x_1^2 + x_2 x_3 - x_2 x_4 - x_3 x_4 &= 0 . \end{aligned}$$

Analogamente per gli altri.

Dato un iperboloide H ce ne sono 6, che formano con esso due gruppi α e sono precisamente quelli che corrispondono alle 6 rette h situate sul primo.

L'iperboloide che corrisponde alla retta $A_1 B_4 C_1$ è

$$A_2 B_1 C_3 , \quad A_3 B_3 C_4 , \quad A_4 B_2 C_2$$
$$A_2 B_2 C_4 , \quad A_3 B_1 C_2 , \quad A_4 B_3 C_2 .$$

Ora quello corrispondente per es. alla retta $A_2 B_1 C_3$ è

$$A_1 B_4 C_1 , \quad A_3 B_3 C_4 , \quad A_4 B_2 C_2$$
$$A_1 B_3 C_2 , \quad A_3 B_2 C_1 , \quad A_4 B_4 C_4 .$$

Come è chiaro, questi due iperboloidi s'incontrano nelle due rette $A_3 B_3 C_4$, $A_4 B_2 C_2$, che non s'incontrano.

Invece due iperboloidi, che corrispondono a due rette h che s'incontrano, s'intersecano in due rette h, che pure s'incontrano.

Teorema XXXVI. Uno qualunque degli iperboloidi H incontra i 6 iperboloidi H, che formano con esso due gruppi α, in due rette h che non s'incontrano, mentre incontra gli altri 9 in due rette h, che s'incontrano.

19. Le 4 rette h di un gruppo α non possono appartenere ad un iperboloide, questo passerebbe per tutti i vertici di (A) (B) (C) e quindi per tutte le rette h, ciò che è impossibile; le 4 rette h di un gruppo α ammettono due sole trasversali comuni h_0. Abbiamo visto, n. 11, che i punti E della retta $A_1 B_1 C_4$ hanno per coordinate

$$\pm i\sqrt{3}, \quad 1, \quad 1, \quad 1 .$$

Considerando le rette $A_2 B_3 C_1$, $A_3 B_4 C_3$, $A_4 B_2 C_2$, che con essa formano un gruppo α, i punti immaginarî E di esse sono:

$$\begin{array}{cccc} -1, & \pm i\sqrt{3}, & -1, & 1 \\ -1 & 1 & \pm i\sqrt{3} & 1 \\ -1 & -1 & 1 & \pm i\sqrt{3}. \end{array}$$

Tiriamo la retta, che passa per il punto $(+ i\sqrt{3}, 1, 1, 1)$ di $A_1 B_3 C_4$ e $(-1, + i\sqrt{3}, -1, 1)$ di $A_2 B_3 C_1$; le coordinate di un suo punto qualunque sono della forma:

$$i\sqrt{3} - \lambda , \quad 1 + i\sqrt{3}.\lambda , \quad 1 - \lambda , \quad 1 + \lambda .$$

Ponendo per λ i valori $\dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ si ottengono i due punti E delle altre due rette h; ciò vuol dire che le trasversali comuni h_0 delle 4 rette h di un gruppo α, le incontrano nei punti E; dunque sono situate nella superficie S, siccome questa passa per i punti E ed E' (Teor. XIX). Che le rette h_0 passano per i punti E delle rette h si dimostra anche projettando da due rette h del gruppo α i tre vertici di (A) (B) (C) della terza sulla 4ª retta h; si ottengono così in quest'ultima nelle due projezioni gli stessi vertici di (A) (B) (C) situati in essa, in modo che si ha (ABC..) $\barwedge$ (BCA..); ciò fa vedere che i punti uniti di queste due punteggiate projettive sono precisamente i punti E.

Teorema XXXVII. Ciascun gruppo α di rette h ammette due trasversali h_0, che incontrano le 4 rette di esso nei punti E. Queste rette h_0 sono 16. — I gruppi α' delle rette h' ammettono le stesse trasversali h_0. — Esse sono situate sulla S.

L'ultima parte di questo teorema può dimostrarsi nel seguente modo. La retta h_0 che passa per un punto immaginario E è situata sulla S, essa è dunque situata sul piano tangente ad S in E, cioè in un piano e (Teor. XIX), il quale passa, come si sa, per la retta h' corrispondente alla retta h, ove giace il punto E; dunque la retta h_0 incontra le 4 rette h', che corrispondono alle 4 rette h del gruppo α e di cui essa è trasversale comune. Quelle 4 rette h' formano anch'esse un gruppo α', quindi due gruppi corrispondenti α ed α' ammettono le stesse trasversali h_0.

Congiungendo i due punti E di una retta h con un punto E' della retta corrispondente h' si ottengono due rette h_0, onde le rette h_0 si scindono in due gruppi di 8 rette, che appartengono ai due sistemi di rette di S, dunque:

Teorema XXXVIII. Le 16 rette h_0 si scindono in due gruppi di 8 rette, due qualunque di un gruppo non s'incontrano, mentre s'incontrano quelle di gruppi differenti in uno dei punti E od E'.

20. L'iperboloide H corrispondente alla retta $A_1\,B_1\,C_2$ passa evidentemente per le due coppie di trasversali h_0, dei due gruppi α, a cui appartiene la $A_1\,B_1\,C_1$; quindi in ogni iperboloide H ci sono 4 rette h_0 e perciò due iperboloidi H, che corrispondono a due rette h dello stesso gruppo α, s'incontrano oltre che in due rette h (Teor. XXVIII) anche in due rette h_0.

Teorema XXXIX. Due iperboloidi di uno stesso gruppo α s'incontrano oltre che in due rette h (Teor. XXXVI) in due rette h_0, che non s'incontrano.

21. Sia ora dato un punto di coordinate y_1, y_2, y_3, y_4, e determiniamo i suoi conjugati nelle involuzioni di 2ª specie, determinate dalle 9 coppie di spigoli dei 6 tetraedri della sestupla fondamentale. Quelli rispetto alle tre coppie di spigoli di (A), si ottengono semplicemente cambiando due segni alle coordinate del punto dato, quelli invece rispetto a (B) e (C) si ottengono pure semplicemente colle formole (1) n. 1. Essi sono distribuiti nei seguenti quadri; a sinistra di ciascun punto è indicato uno dei due spigoli, rispetto ai quali esso è conjugato di 2ª specie del punto dato.

1. $y_1\ y_2\ y_3\ y_4$

$A_1 A_3$	2	$-y_1\ \ y_2 - y_3\ \ y_4$	$B_1 B_3$	5	$y_3\ y_4\ y_1\ y_2$	$C_1 C_3$	8	$y_3 - y_4\ \ y_1 - y_2$
$A_1 A_4$	3	$y_1 - y_2 - y_3\ \ y_4$	$B_1 B_4$	6	$y_4\ y_3\ y_2\ y_1$	$C_1 C_4$	9	$-y_4\ \ y_3\ \ y_2 - y_1$
$A_1 A_2$	4	$-y_1 - y_2\ \ y_3\ \ y_4$	$B_1 B_2$	7	$y_2\ y_1\ y_4\ y_3$	$C_1 C_2$	10	$y_2\ \ y_1 - y_4 - y_3$

Osservo che i conjugati di 2ª specie rispetto alle coppie di spigoli opposti di (B) e (C), sono due a due conjugati di 2ª specie rispetto alle coppie di spigoli opposti di (A). Se di 2, 3 ecc. si fa la stessa operazione si ottengono rispetto ad (A) gli stessi punti 1 3 4 ed avremo:

2. $-y_1\ y_2 - y_3\ y_4$

$B_1 B_3$	8	$-y_3\ \ y_4 - y_1\ \ y_2$	$C_1 C_3$	5	$y_3\ \ y_4\ \ y_1\ y_2$
$B_1 B_4$	11	$y_4 - y_3\ \ y_2 - y_1$	$C_1 C_4$	13	$-y_4 - y_3\ \ y_2\ y_1$
$B_1 B_2$	12	$y_2 - y_1\ \ y_4 - y_3$	$C_1 C_2$	14	$y_2 - y_1 - y_4\ y_3$

3. $y_1 - y_2 - y_3 \; y_4$

$B_1 B_3$	15	$-y_3 \; y_4 \; y_1 - y_2$	$C_1 C_3$	16	$-y_3 - y_4 \; y_1 \; y_2$
$B_1 B_4$	11	$y_4 - y_3 - y_2 \; y_1$	$C_1 C_4$	6	$y_4 \; y_3 \; y_2 \; y_1$
$B_1 B_2$	14	$-y_2 \; y_1 \; y_4 - y_3$	$C_1 C_2$	12	$-y_2 \; y_1 - y_4 \; y_3$

4. $-y_1 - y_2 \; y_3 \; y_4$

$B_1 B_3$	16	$y_3 \; y_4 - y_1 - y_2$	$C_1 C_3$	15	$y_3 - y_4 - y_1 \; y_2$
$B_1 B_4$	13	$y_4 \; y_3 - y_2 - y_1$	$C_1 C_4$	11	$y_4 - y_3 - y_2 \; y_1$
$B_1 B_2$	10	$-y_2 - y_1 \; y_4 \; y_3$	$C_1 C_2$	7	$y_2 \; y_1 \; y_4 \; y_3$

I punti 1 2 5 8 formano* due coppie 1 2, 5 8 di punti conjugati di 2ª specie rispetto agli spigoli $A_1 A_3$, $A_2 A_4$; due coppie 15, 28 di punti conjugati di 2ª specie rispetto agli spigoli $B_1 B_3$, $B_2 B_4$ di (B) e 18, 25 sono conjugati di 2ª specie rispetto alla coppia di spigoli $C_1 C_3$, $C_2 C_4$ di (C). Questo risulta chiaro dal precedente quadro ed è altresì chiaro essendo $A_1 A_3$, $A_2 A_4$; $B_1 B_3$, $B_2 B_4$: $C_1 C_3$, $C_2 C_4$ spigoli del tetraedro $P_{13} P'_{13} P_{24} P'_{24}$ della 2ª terna (Vedi n 2, quadro Q), onde 1 2 5 8 formano un tetraedro fasciale con $P_{13} P'_{13} P_{24} P'_{24}$. Così i punti 1 3 6 9, 1 4 7 10 determinano due tetraedri fasciali rispettivamente con gli altri due tetraedri della 2ª terna. I punti 5, 8, 15, 16 formano invece un tetraedro fasciale con (A), come anche 6, 9, 11, 13 e 7, 10, 12, 14. Dunque i 16 punti ottenuti sono vertici di 4 tetraedri fasciali rispetto ad (A) e per la stessa ragione rispetto agli altri 5 tetraedri della sestupla fondamentale. Se scegliamo il tetraedro 5, 8, 15, 16 e costruiamo dei suoi vertici i conjugati di 2ª specie rispetto alla coppia $B_1 B_3$, $B_2 B_4$ oppure $C_1 C_3$, $C_2 C_4$ (vedi quadri precedenti) otteniamo i punti 1 2 3 4 stessi. Ma v'ha di più, i 16 punti formano un ciclo tale, che se di uno di essi si trovano i conjugati di 2ª specie rispetto alle 9 coppie di spigoli opposti dei 6 tetraedri della sestupla fondamentale, si ottengono 9 punti degli stessi 16 punti.

Teorema XL. Se dei vertici del tetraedro fasciale di un punto P rispetto ad uno della sestupla fondamentale per es. (A) si costruiscono i conjugati nelle involuzioni, date dalle 3 coppie di spigoli opposti degli altri due tetraedri (B) e (C), si ottengono 12 punti, che formano tre tetraedri fasciali con (A). Facendo la stessa operazione con uno qualunque di questi tre tetraedri risultano gli altri due tetraedri e il 1° appartenente a P. I 16 vertici di questi 4 tetraedri determinano una configurazione K chiusa, tale che di un suo punto qualunque i conjugati di 2ª specie rispetto alle 9 coppie di spigoli della sestupla fondamentale coincidono con se 9 dei 16 punti di essa. I 16 punti si separano in 4 tetraedri fasciali rispetto ad uno qualunque dei 6 tetraedri della sestupla fondamentale.

22. Del punto $y_1 \, y_2 \, y_3 \, y_4$ ossia 1 (n. 21) i conjugati di 2ª specie rispetto alle 9 coppie di spigoli opposti sono i punti dal 2 al 10; dei 16 punti dunque ne rimangono 6 cioè:

11 $\; y_4 - y_3 \; y_2 - y_1$, $\quad$ 12 $\; y_2 - y_1 \; y_4 - y_3$, $\quad$ 13 $\; -y_4 - y_3 \; y_2 \; y_1$

14 $\; -y_2 - y_1 - y_4 \; y_3$, $\quad$ 15 $\; -y_3 \; y_4 \; y_1 - y_2$, $\quad$ 16 $\; -y_3 - y_4 \; y_1 \; y_2$.

Questi 6 punti stanno in un piano, cioè nel piano polare

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4 = 0$$

del punto 1 rispetto alla $S \equiv x_1^2 + x_2^2 x_3^2 + x_4^2 = 0$. Questo ha luogo naturalmente per ognuno dei 16 punti di K, quindi essi sono disposti 6 a 6 in 16 piani, che sono i piani polari dei 16 punti rispetto alla S. Questi 16 piani formano alla lor volta una configurazione K. È facile anche di verificare che i 6 punti 11, 12, 13, 14, 15, 16 sono situati in una conica. La configurazione K è adunque analoga, alla configurazione dei 16 punti singolari e 16 piani singolari di una superficie di Kummer. Pigliamo ora i punti 3, 4, 6, 7 cioè:

$$y_1 \; -y_2 \; -y_3 \; y_4, \qquad -y_1 \; -y_2 \; y_3 \; y_4, \qquad y_4 \; y_3 \; y_2 \; y_1, \qquad y_2 \; y_1 \; y_4 \; y_3$$

Questi 4 punti sono situati sul piano polare di $y_1\, y_2\, y_3\, y_4$ rispetto ad

$$S_7 \equiv x_1 x_3 - x_2 x_4 = 0$$

cioè

$$x_1 y_3 + x_3 y_1 - x_2 y_4 - x_4 y_3 = 0$$

esso passa anche pei punti 13 e 14, vale a dire esso è uno dei 16 piani di K; dunque i 16 piani di K sono i 16 piani polari dei suoi 16 punti rispetto alle 10 superficie $SS_1 \ldots\ldots S_9$; dunque la K ha le stesse proprietà rispetto alle 10 sestuple formate coi 6 tetraedri reali e i 9 immaginarî F.

Teorema XLI. I conjugati di 2ª specie di un punto P rispetto alle 9 coppie di spigoli opposti di una delle 10 sestuple (Teor. XXIV) per es. della fondamentale sono situati 3 a 3 nei piani polari di esso rispetto ai 6 tetraedri della sestupla e 4 a 4 nei suoi piani polari rispetto alle 9 superficie $S_1 \ldots . S_9$. Gli altri 6 punti della configurazione K, a cui dà luogo il punto P, sono situati sul piano polare di P rispetto alla S. — Questi 6 punti sono situati in una conica. — Per due di questi ultimi punti passano rispettivamente i piani polari di P rispetto alle superficie $S_1 \ldots . S_9$. — La configurazione K ha le stesse proprietà rispetto a ciascuna delle 10 sestuple di 6 tetraedri, e i suoi 16 piani formano una configurazione K e sono rispettivamente i piani polari dei suoi 16 punti rispetto alle 10 superficie $SS_1 \ldots . S_9$. La configurazione K è analoga a quella dei 16 punti e 16 piani singolari della superficie di Kummer (¹).

23. Abbiamo finora considerato i conjugati di 2ª specie di un punto P, rispetto alle 9 coppie di spigoli opposti dei 6 tetraedri di una sestupla qualunque. Ora considereremo anche i conjugati di 1ª specie S di un punto P rispetto alle involuzioni di 1ª specie date dai vertici e piani opposti dei tetraedri di una delle due terne di una sestupla per es. (A) (B) (C). Tenendo conto delle formole (1) (2), n. 1, si hanno i seguenti punti. Il punto $y_1\, y_2\, y_3\, y_4$ ha rispetto ad (A) per conjugati di 1ª specie i punti:

17 $-y_1\; y_2\; y_3\; y_4$, 18 $y_1\; -y_2\; y_3\; y_4$, 19 $y_1\; y_2\; -y_3\; y_4$, 20 $y_1\; y_2\; y_3\; -y_4$

rispetto a (B):

21 $(y_1+y_2+y_3-y_4)$, $(y_1+y_2-y_3+y_4)$, $(y_1-y_2+y_3+y_4)$, $(-y_1+y_2+y_3+y_4)$

22 $(y_1-y_2+y_3+y_4)$, $(-y_1+y_2+y_3+y_4)$, $(y_1+y_2+y_3-y_4)$, $(y_1+y_2-y_3+y_4)$

23 $(y_1+y_2-y_3+y_4)$, $(y_1+y_2+y_3-y_4)$, $(-y_1+y_2+y_3+y_4)$, $(+y_1-y_2+y_3+y_4)$

24 $(-y_1+y_2+y_3+y_4)$, $(y_1-y_2+y_3+y_4)$, $(y_1+y_2-y_3+y_4)$, $(y_1+y_2+y_3-y_4)$

(¹) Vedi anche Klein, l. c.

rispetto a (C):

25 $(y_1+y_2+y_3+y_4)$, $(\ y_1+y_2-y_3-y_4)$, $(\ y_1-y_2+y_3-y_4)$, $(\ y_1-y_2-y_3+y_4)$
26 $(y_1-y_2+y_3-y_4)$, $(-y_1+y_2+y_3-y_4)$, $(\ y_1+y_2+y_3+y_4)$, $(-y_1-y_2+y_3+y_4)$
27 $(y_1+y_2-y_3-y_4)$, $(\ y_1+y_2+y_3+y_4)$, $(-y_1+y_2+y_3-y_4)$, $(-y_1+y_2-y_3+y_4)$
28 $(y_1+y_2-y_3+y_4)$, $(-y_1+y_2-y_3+y_4)$, $(-y_1-y_2+y_3+y_4)$, $(\ y_1+y_2+y_3+y_4)$.

Così continuando coi punti 2 3 4 si hanno altri punti, che si possono ottenere semplicemente da questi col solo scambio di alcuni segni, donde

Teorema XLII. Se dei vertici di un tetraedro 1234 fasciale per es. con (A) si costruiscono i conjugati di 1^a specie nelle involuzioni date dai vertici e dai piani opposti di uno dei tetraedri (B), (C), si ottengono 16 punti, che formano 4 tetraedri fasciali rispetto ad (A).

Teorema XLIII. Il tetraedro fasciale complementare di 1234 rispetto ad (A) dà luogo rispetto a (C) o (B) ai 4 tetraedri (Teor. XLII), rispettivamente complementari a quelli determinati da 1234 rispetto ad (A).

E continuando l'operazione indicata coi nuovi punti ottenuti si ha:

Teorema XLIV. Se di un punto P si trovano i conjugati di 1^a e 2^a specie nelle involuzioni date dai tre tetraedri di una terna per es. (A) (B) (C) e lo stesso si fa coi nuovi punti ottenuti, si ottiene un ciclo V di 96 punti, che si compone di 6 configurazioni K. Esso ha perciò anche 96 piani che contengono 6 a 6 quei 96 punti e che determinano pure un ciclo V.

24. Il piano che congiunge il punto $y_1\ y_2\ y_3\ y_4$ con la retta h $A_1\ B_1\ C_1$ ha per equazione:

$$x_1(y_3-y_2)+x_2(y_1-y_3)+x_3(y_2-y_1)=0$$

questo deve contenere i conjugati di 1^a specie del punto 1 rispetto alle involuzioni $A_4\ \alpha_4$, $B_1\ \beta_1$, $C_1\gamma_1$. Essi sono, come si sa dal num. precedente i punti 20, 24 e 28 cioè

$$y_1\quad y_2\quad y_3\quad -y_4$$

$(-y_1+y_2+y_3+y_4)$, $(\ y_1-y_2+y_3+y_4)$, $(\ y_1+y_2-y_3+y_4)$, $(y_1+y_2+y_3-y_4)$
$(\ y_1-y_2-y_3+y_4)$, $(-y_1+y_2-y_3+y_4)$, $(-y_1-y_2+y_3+y_4)$, $(y_1+y_2+y_3+y_4)$.

Ora di 20 trovando i conjugati di 1^a specie nelle stesse involuzioni si ottengono il punto 1 e due altri punti di V cioè :

$(-y_1+y_2+y_3-y_4)$, $(\ y_1-y_2+y_3-y_4)$, $(\ y_1+y_2-y_3-y_4)$, $(y_1+y_2+y_3+y_4)$
$(-y_1+y_2+y_3+y_4)$, $(+y_1-y_2+y_3+y_4)$, $(+y_1+y_2-y_3+y_4)$, $(y_1+y_2+y_3-y_4)$.

Se facciamo lo stesso coi due punti 24 e 28 già trovati, otteniamo dei punti trovati. Questi 6 punti sono in una conica e formano due triangoli omologhi in tre maniere differenti per i punti $A_1\ B_1\ C_1$ come centri e le rette d'intersezione del piano con $\alpha_4\ \beta_1\ \gamma_1$ come assi di omologia. Dunque:

Teorema XLV. I 96 punti di un ciclo V sono situati 6 a 6 in 16 piani O che passano per una retta qualunque h. In ciascuno di questi piani O i 6 punti sono situati in una conica, e formano due triangoli omologici in 3 maniere differenti per i vertici dei tetraedri (A) (B) (C) situati sulla retta h del piano O come centri e l'intersezioni del piano O con le facce opposte come assi di omologia. I piani O di un ciclo V sono 240. — Analogamente per i 96 piani di V.

Se il punto P è situato in una retta h i 6 punti considerati precedentemente, cadono tutti in h e si ha perciò:

Teorema XLVI. Se il punto P cade in una retta h, i 96 punti del ciclo V corrispondente a quel punto rispetto ad (A) (B) (C) sono situati 6 a 6 sulle 16 rette h; se P è invece un punto di una delle rette h', il ciclo V si riduce ad una configurazione K speciale.

La seconda parte di questo teorema si dimostra pure facilmente.

25. Se del punto $y_1\, y_2\, y_3\, y_4$ costruiamo il piano polare rispetto al tetraedro (A) esso ha per equazione:

$$\frac{x_1}{y_1}+\frac{x_2}{y_2}+\frac{x_3}{y_3}+\frac{x_4}{y_4}=0$$

e se così facciamo per tutti i punti della configurazione K, a cui dà luogo il punto 1 (vedi n. 23), vediamo che essi formano un'altra configurazione K; che è appunto quella data dal punto conjugato $\frac{1}{y_1}\,\frac{1}{y_2}\,\frac{1}{y_3}\,\frac{1}{y_4}$ di $y_1\, y_2\, y_3\, y_4$ rispetto al tetraedro (A); di modo che i 16 punti della 1ª e i 16 punti della 2ª configurazione K sono conjugati rispetto ad (A). È chiaro pure che se dei 16 punti della 2ª configurazione si pigliano i piani polari rispetto ad (A), si ottengono i 16 piani della 1ª. Così succede pure rispetto ad un tetraedro qualunque di una qualunque delle 10 sestuple di tetraedri fasciali e si ha:

Teorema XLVII. I piani polari dei 16 punti di una configurazione K rispetto ad uno dei 15 tetraedri fondamentali, costituiscono un'altra configurazione K, i cui 16 punti sono i conjugati dei primi rispetto a quel tetraedro.

Analogamente si trova:

Teorema XLVIII. Se di ciascuno dei punti di una configurazione K, si trovano i 4 punti conjugati di 1ª specie rispetto ad uno qualunque dei 15 tetraedri fondamentali si ottiene un'altra configurazione K.

Se di ciascuno dei 96 punti di un ciclo V, che si riferisce ai tetraedri di una terna per es. (A) (B) (C), si trovano i 4 punti conjugati di 1ª specie rispetto ad un tetraedro della 2ª terna (P') (P'') (P''') si ottengono altri 96 punti, che formano un ciclo V, rispetto alla 1ª terna.

Teorema XLIX. Le 16 rette h e quindi anche i 16 iperboloidi H formano un ciclo V, ridotto ad una configurazione speciale K rispetto ai tetraedri della 1ª e 2ª terna della sestupla fondamentale. Analogamente per le rette h' e per gli iperboloidi H'.

26. Abbiamo trovato il ciclo V del punto $y_1\, y_2\, y_3\, y_4$ determinando i suoi conjugati rispetto alle involuzioni di 1ª e 2ª specie, date dai tre tetraedri (A) (B) (C). Ora se consideriamo anche i conjugati di 1ª e 2ª specie di $y_1\, y_2\, y_3\, y_4$ rispetto ai tetraedri della 2ª terna (P') (P'') (P'''), e di tutti i punti così ottenuti, si dimostrano facilmente i seguenti teoremi:

Teorema L. Se dei vertici di un tetraedro (Y) fasciale con uno dei tetraedri della 1ª terna (A) (B) (C) per es. (A) si determinano i conjugati nelle involuzioni di 1ª specie date da uno qualunque dei tetraedri della 2ª terna, si ottengono 8 soli punti, che formano due tetraedri (P) (Q) fasciali con (A). Se dei vertici del tetraedro (Y′) fasciale complementare di (Y) rispetto ad (A) si fa la stessa operazione si ottengono altri 8 punti, che determinano i due tetraedri (P′) (Q′), fasciali complementari di (P) (Q) rispetto ad (A).

Teorema LI. Se di un punto P si determinano i conjugati nelle involuzioni di 1ª e 2ª specie date dalle 9 coppie di spigoli dei 6 tetraedri della sestupla fondamentale e dai loro vertici e facce opposte, e si fa la stessa operazione coi nuovi punti ottenuti, si ottiene un ciclo Z di 576 punti, composto di 36 configurazioni K, che formano 6 cicli V rispetto ai tre tetraedri della 1ª terna e 6 rispetto a quelli della 2.ª Analogamente per le altre 9 sestuple di tetraedri fasciali. I 23 punti che risultano scambiando le coordinate di un punto qualunque del ciclo Z rispetto ad uno qualunque dei 6 tetraedri della sestupla fondamentale appartengono allo stesso ciclo Z (Vedi Teor. LXXXV, Mem. Iª).

27. Se un punto $y_1\ y_2\ y_3\ y_4$ è situato sulla $S \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$ è evidente che in essa è inscritto l'intero ciclo Z, a cui dà luogo il punto y_i rispetto alla sestupla fondamentale, perchè i 6 tetraedri di essa sono conjugati rispetto ad S; e siccome ogni tetraedro conjugato alla superficie S dà luogo a una tale sestupla (Teor. XIII) così per ogni tetraedro conjugato otteniamo un tale aggruppamento Z di punti, piani, tangenti e rette di S. Dunque:

Teorema LII. Se un punto o una retta appartiene alla S, il ciclo Z corrispondente rispetto alla sestupla fondamentale è inscritto in S. Analogamente per un piano tangente di S si ottiene un ciclo Z circoscritto ad S. Per ogni tetraedro conjugato ad S si ottiene un tale aggruppamento dei suoi punti, piani tangenti e delle sue rette (Teor. XII).

Se invece il punto $y_1 y_2 y_3 y_4$ appartiene ad uno degli iperboloidi $S_1 \ldots\ldots S_9$, la configurazione K corrispondente è inscritta in esso, questo si vede sia dalle coordinate dei punti di K, come anche dall'avere K la stessa relazione con tutte le 10 superficie $S\ S_1 \ldots S_9$.

Teorema LIII. Se un punto appartiene ad una delle superficie $S_1 \ldots . S_9$, la configurazione $\mathcal{E}$ a cui dà luogo è inscritta in essa.

Consideriamo invece le superficie E di un gruppo per es. $\mathcal{E}_1\,\mathcal{E}_2\,\mathcal{E}_3\,\mathcal{E}_4$ (n. 12) cioè:

$$-x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0 \equiv \mathcal{E}_1$$
$$x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0 \equiv \mathcal{E}_2$$
$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + x_4^2 = 0 \equiv \mathcal{E}_3$$
$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 0 \equiv \mathcal{E}_4$$

e sia dato il punto $y_1\,y_2\,y_3\,y_4$ in $\mathcal{E}_1$; in $\mathcal{E}_1$ sono allora pure situati i punti $(-y_1,\ y_2,$

$-y_3, y_4)$, $y_1, -y_2, -y_3, y_4)$ $(-y_1, -y_2, +y_3, y_4)$ nel 2° invece sono situati i 4 punti

$$\begin{smallmatrix}+\\-\\+\\-\end{smallmatrix} y_2, \ \begin{smallmatrix}+\\-\\-\\+\end{smallmatrix} y_1, \ \begin{smallmatrix}+\\+\\-\\-\end{smallmatrix} y_4, \ \begin{smallmatrix}+\\+\\+\\+\end{smallmatrix} y_3, \quad \text{nel 3° i 4 punti} \quad \begin{smallmatrix}+\\+\\-\\-\end{smallmatrix} y_4, \ \begin{smallmatrix}+\\-\\+\\-\end{smallmatrix} y_3, \ \begin{smallmatrix}+\\-\\-\\+\end{smallmatrix} y_3, \ \begin{smallmatrix}+\\+\\+\\+\end{smallmatrix} y_4$$

e così nel 4° i 4 punti

$$\begin{smallmatrix}+\\+\\-\\-\end{smallmatrix} y_4, \ \begin{smallmatrix}+\\-\\+\\-\end{smallmatrix} y_3, \ \begin{smallmatrix}+\\-\\-\\+\end{smallmatrix} y_2, \ \begin{smallmatrix}+\\+\\+\\+\end{smallmatrix} y_1$$

della configurazione K, a cui dà luogo $y_1 y_2 y_3 y_4$

Teorema LIV. Se in una delle superficie $\mathcal{E}$ di un gruppo, che si riferisce per es. al tetraedro (A) si considera un punto, il ciclo K corrispondente si scompone in 4 tetraedri fasciali con (A) e inscritti rispettivamente nelle 4 superficie $\mathcal{E}$.

28. Se del punto $y_1 y_2 y_3 y_4$ si costruiscono i piani polari rispetto alle 12 superficie $\mathcal{E}$ di una bisestupla per es. della 1ª (n. 12) si hanno le seguenti equazioni rispetto ad $\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2 \mathcal{E}_3 \mathcal{E}_4$

$$\begin{smallmatrix}\mp\\+\\+\end{smallmatrix} x_1 y_1 \begin{smallmatrix}\pm\\+\\+\end{smallmatrix} x_2 y_2 \begin{smallmatrix}+\\\pm\\+\end{smallmatrix} x_3 y_3 \begin{smallmatrix}+\\+\\\pm\end{smallmatrix} x_4 y_4 = 0$$

rispetto a $\mathcal{E}_5 \mathcal{E}_6 \mathcal{E}_7 \mathcal{E}_8$

$$x_1\left(\begin{smallmatrix}\mp\\+\\+\end{smallmatrix} y_1 \begin{smallmatrix}\pm\\+\\+\end{smallmatrix} y_2 \begin{smallmatrix}+\\\pm\\+\end{smallmatrix} y_3 \begin{smallmatrix}+\\+\\\pm\end{smallmatrix} y_4\right) + x_2\left(\begin{smallmatrix}\pm\\+\\+\end{smallmatrix} y_1 \begin{smallmatrix}\mp\\+\\+\end{smallmatrix} y_2 \begin{smallmatrix}+\\+\\\pm\end{smallmatrix} y_3 \begin{smallmatrix}+\\\pm\\+\end{smallmatrix} y_4\right) + x_3\left(\begin{smallmatrix}+\\\pm\\+\end{smallmatrix} y_1 \begin{smallmatrix}+\\+\\\pm\end{smallmatrix} y_2 \begin{smallmatrix}\mp\\+\\+\end{smallmatrix} y_3 \begin{smallmatrix}\pm\\+\\+\end{smallmatrix} y_4\right)$$

$$+ x_4\left(\begin{smallmatrix}+\\+\\\pm\end{smallmatrix} y_1 \begin{smallmatrix}+\\\pm\\+\end{smallmatrix} y_2 \begin{smallmatrix}\pm\\+\\+\end{smallmatrix} y_3 \begin{smallmatrix}\mp\\+\\+\end{smallmatrix} y_4\right) = 0$$

e analogamente per $\mathcal{E}_9 \mathcal{E}_{10} \mathcal{E}_{11} \mathcal{E}_{12}$. Ora questi non sono altro che i piani polari dei punti 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28 (n. 23) rispetto alla S, dunque sono piani del ciclo V, a cui dà luogo il punto $(y_1 y_2 y_3 y_4)$ rispetto ai tetraedri della 1ª terna, donde:

Teorema LV. I 96 punti di un ciclo V, che si riferisce ad una terna di tetraedri e i suoi 96 piani sono rispettivamente poli e piani polari non solo rispetto alle 10 superficie $SS_1 \ldots S_9$ (Teor. XLIII) ma anche rispetto alle 12 superficie $\mathcal{E}$ della bisestupla che si riferisce a quella terna.

Se di $y_1 y_2 y_3 y_4$ si pigliano anche i piani polari rispetto alle altre 12 superficie $\mathcal{E}$ $\mathcal{E}_{13} \ldots \mathcal{E}_{24}$ si ottengono piani del ciclo Z onde si ricava:

Teorema LVI. I 576 punti di un ciclo Z, che si riferisce ad una sestupla di tetraedri fasciali e i suoi 576 piani sono rispettivamente poli e piani polari rispetto alle 10 superficie $SS_1 \ldots S_9$ e alle 24 superficie $\mathcal{E}$ delle due bisestuple, che si riferiscono alle due terne conjugate di quella sestupla.

Parte II.

Applicazione alle coniche e all'Hexagrammum mysticum.

29. Un piano quantunque taglia la figura dei 6 tetraedri di una sestupla in due terne di quadrilateri. I lati di due quadrilateri di una terna s'incontrano due a due nei lati del terzo in 16 punti h', perchè le facce dei tre tetraedri (A) (B) (C), s'incontrano tre a tre nelle 16 rette h'. Analogamente avviene per i tre quadrilateri della 2^a terna. Abbiamo 9 coppie di vertici opposti, come nello spazio abbiamo 9 coppie di spigoli opposti della sestupla. Le 16 rette h sono incontrate dal piano in 16 punti h, situati 4 a 4 in 12 rette (lati dei quadrilateri della 2^a terna) le quali passano due a due per uno qualunque dei vertici dei tre quadrilateri della 1^a terna formando con i due lati di questi un gruppo armonico. Quelle 12 rette rappresentano evidentemente l'intersezione del piano con i 12 piani Π_{ik}, che passano due a due per gli spigoli di (A) (B) (C), formando con le due facce, che s'incontrano negli spigoli, un gruppo armonico (Teor. IV). Dunque:

Teorema LVII. Un piano qualunque taglia la figura di 6 tetraedri di una sestupla in due terne conjugate di quadrilateri fasciali. I lati di due quadrilateri della 1^a terna s'incontrano due a due nei lati del terzo in 16 punti h', e quelli della 2^a terna in 16 punti h. I vertici opposti dei quadrilateri della 1^a e 2^a terna sono gli stessi. I lati dei quadrilateri di una terna passano due a due rispettivamente per i vertici degli altri tre, formando un gruppo armonico, con i due lati di questi, che passano per quei vertici.

Abbiamo visto che ad una retta h, corrisponde un iperboloide H, che passa per 6 rette h (Teor. XXXV).

Teorema LVIII. I 16 punti h sono situati 6 a 6 in 16 coniche H; analogamente i 16 punti h' sono situati in 16 coniche H'.

Abbiamo visto pure che le superficie $S_1 \ldots . S_9$ passano rispettivamente per due coppie di spigoli di due tetraedri della 1^a terna (A) (B) (C), che sono anche due coppie di spigoli di due tetraedri della 2^a terna (P') (P'') (P''') (Teor. XX e XXI), dunque:

Teorema LIX. Due coppie di vertici opposti di due quadrilateri di una terna, che determinano anche due coppie di vertici opposti di due quadrilateri della terna conjugata, sono situate sopra una conica che ha il terzo quadrilatero, tanto della 1^a quanto della 2^a terna, come polare, cioè tale, che i vertici opposti di esso sono conjugati rispetto alla conica. Queste coniche sono 9.

La superficie S dà nel piano una conica, che ha i 6 quadrilateri come polari, e siccome abbiamo visto (Teor. XIII) che ogni tetraedro conjugato rispetto ad S dà luogo ad una sestupla di tetraedri fasciali conjugati rispetto ad S, così ogni quadrilatero polare dà luogo rispetto alla S ad una sestupla di quadrilateri fasciali rispetto alla S.

Teorema LX. I 6 quadrilateri delle due terne sono polari rispetto ad una conica S. Rispetto a questa conica sono conjugati due a due i 16 punti h e i 16 punti h'. — Ogni quadrilatero polare rispetto ad una conica S dà luogo ad una tale sestupla di quadrilateri polari.

30. Questa figura piana è precisamente quella da me studiata nella mia Memoria sull'*Hexagrammum*, ser. 3ª, vol. I. p. 675 e la correlativa di questa a p. 686, la quale non è che un' estensione del mio teorema IV della stessa Memoria.

Considero la 1,ª cioè quella a pag. 675. I tre quadrilateri della 1ª terna sono rappresentati dai punti K^{I}_{14} K^{II}_{15} K^{II}_{15} K^{II}_{34} K^{II}_{13} K^{II}_{35} e K^{I}_{14} K^{I}_{45} K^{I}_{15} K^{I}_{34} K^{I}_{13} K^{I}_{35}, che sono punti di Kirkman e i cui lati sono le rette di Pascal p^{II}_{145} p^{II}_{134} p^{II}_{135} p^{II}_{345} e p^{I}_{145} p^{I}_{134} p^{I}_{135} p^{I}_{345}, che appartengono a due delle mie figure π cioè I e II. Il terzo quadrilatero è dato dai lati del triangolo Δ_{12} di queste due figure cioè 12, 34, 56 (ove 1, 2, 3, 4, 5, 6 sono i 6 punti fondamentali) e dalla retta g_{12} di Steiner Plücker delle due figure I II. I vertici opposti di questo quadrilatero sono $P_{12\cdot34}$ $Y_{12\cdot34}$, $P_{12\cdot56}$ $Y_{12\cdot56}$, $P_{43\cdot56}$ $Y_{34\cdot56}$. — I 16 punti h' sono rappresentati dai 12 punti $P_{12\cdot36}$, $P_{12\cdot35}$, $P_{12\cdot46}$, $P_{12\cdot45}$, $P_{13.56}$, $P_{23,56}$, $P_{14\cdot56}$ $P_{24\cdot56}$, $P_{25\cdot34}$, $P_{26\cdot34}$, $P_{16\cdot34}$ e dai 4 punti di Steiner G_{123} G_{124} G_{125} G_{126} situati sulla g_{12}. Le coppie di vertici opposti dei tre quadrilateri della 2ª terna, che sono le stesse di quelli dei tre primi, sono K^{I}_{14} K^{I}_{35}, K^{II}_{34} K^{II}_{15}, $P_{12.34}$ $Y_{12\cdot34}$; K^{I}_{34} K^{I}_{15}; K^{II}_{35} K^{II}_{14}, $P_{12\cdot56}$ $Y_{21.56}$; K^{I}_{13} K^{I}_{45}, K^{II}_{13} K^{II}_{45}, $P_{34\cdot56}$ $Y_{34\cdot56}$. — I lati di questi tre quadrilateri sono:

$$v_{12}=\overset{I}{K}_{35}\overset{II}{K}_{34}\overset{V}{Z}_{45.2}\overset{VI}{Z}_{35.2}P_{12.34}\,,\quad v_{12}=\overset{I}{K}_{14}\overset{II}{K}_{15}\overset{III}{Z}_{12.2}\overset{IV}{Z}_{45.2}P_{12.34}\,,\ \text{e le rette}\ m_1=\overset{I}{K}_{14}\overset{II}{K}_{34}Y_{12.34},\ \text{e}\ m_2=\overset{I}{K}_{3}\overset{II}{K}_{15}Y_{12.34}$$

$$v_{12}=\overset{I}{K}_{34}\overset{II}{K}_{35}\overset{IV}{Z}_{45.2}\overset{VI}{Z}_{35.2}P_{12.56}\,,\quad v_{12}=\overset{I}{K}_{15}\overset{II}{K}_{14}\overset{III}{Z}_{12.2}\overset{V}{Z}_{45.2}P_{12.56}\,,\quad \text{»}\quad m_3=\overset{I}{K}_{34}\overset{II}{K}_{14}Y_{12.56},\ \text{e}\ m_4=\overset{I}{K}_{15}\overset{II}{K}_{35}Y_{12.56}$$

$$v_{12}=\overset{I}{K}_{13}\overset{II}{K}_{13}\overset{III}{Z}_{12.2}\overset{VI}{Z}_{35.2}P_{34.56}\,,\quad v_{12}=\overset{I}{K}_{45}\overset{II}{K}_{45}\overset{IV}{Z}_{45.2}\overset{V}{Z}_{45.2}P_{34.56}\,,\quad \text{»}\quad m_5=\overset{I}{K}_{45}\overset{II}{K}_{43}Y_{34.56},\ \text{e}\ m_6=\overset{I}{K}_{13}\overset{II}{K}_{45}Y_{34.56}.$$

I 16 punti h sono dunque rappresentati dai 12 punti T nei quali s'incontrano due a due le 6 rette m e che sono situati due a due sulle 6 rette v_{12} delle due figure π (Teor. XXX della Mem. sull'*Hexagr.*) e i 4 punti $Z^{III}_{12\cdot2}$ $Z^{IV}_{45\cdot2}$ $Z^{V}_{45\cdot2}$ $Z^{VI}_{35\cdot2}$, nei quali s'incontrano tre a tre le 6 rette v_{12}.

Applicando i teoremi precedentemente trovati abbiamo:

Teorema LXI. I 12 punti P del triangolo Δ di due figure π dell'Hexagrammum mysticum (tranne i vertici di esso) e i 4 punti di Steiner della retta di Steiner-Plücker di quelle due figure, sono 6 a 6 situati in 16 coniche H'. I 12 punti T e i 4 punti Z, determinati dalle due figure Π, sono situati pure 6 a 6 in 16 coniche H. Le coniche H ed H' sono 240 in tutto l'Hexagrammum.

Teorema LXII. Le 6 coppie di vertici opposti (punti di Kirkman) dei due quadrilateri di rette di Pascal delle due figure π, le quali s'incontrano rispettivamente due a due nei 12 punti P del triangolo Δ (Teorema XXII sull'*Hexagr.*) sono situate 4 a 4 in 3 coniche.— Queste coniche hanno il quadrilatero formato dal triangolo Δ e dalla retta di Steiner-Plücker, come polare, come anche uno dei tre quadrilateri formati colle rette m e le 6 rette v_{12} delle due figure π. In tutto l'Hexagrammum queste coniche sono 45. Ci sono altre 6 coniche, che passano rispettivamente per due coppie di punti di Kirkman di uno dei due quadrilateri di rette di Pascal e per due coppie di vertici del terzo quadrilatero, e che hanno il quadrilatero rimanente di rette di Pascal come polare. Queste coniche sono 90.

Teorema LXIII. C'è una conica S immaginaria, rispetto alla quale sono polari i due quadrilateri di rette di Pascal, il quadrilatero formato col triangolo Δ e la retta di Steiner-Plücker, che formano una terna e i tre quadrilateri formati con le 6 rette m e le 6 rette v_{12}, che formano la 2ª terna. Rispetto alla S sono conjugati i 12 punti P e i 4 punti di Steiner delle due figure π con i 12 punti T e i 4 punti Z. Di queste coniche S ce ne sono 15 in tutto l'Hexagrammum. Quali relazioni hanno fra loro e con la conica fondamentale e con le 16 coniche π?

Abbiamo tralasciato di considerare l'intersezione del piano con gli altri 9 tetraedri immaginarî F, che con i 6 reali formano 10 sestuple di tetraedri fasciali. Nella figura data da due figure π abbiamo dunque 10 sestuple di quadrilateri fasciali. Sarebbe interessante di vedere quali relazioni hanno le altre 9 sestuple coll'Hexagrammum, considerando naturalmente le sestuple analoghe in tutte le 15 figure, date dalle combinazioni delle 6 figure π, due a due. Presa una delle 9 sestuple in una tale combinazione, a questa ne corrisponde una ed una sola in ognuna delle altre 14 combinazioni. Queste 15 sestuple, per la sestupla reale formano l'Hexagrammum e per un'altra delle sestuple che cosa formano? Se si considera la fig. correlativa a p. 686, Mem. sull'*Hexagr.*, altre sono le proprietà che si ottengono, essendo essa molto diversa per elementi da quella che abbiamo considerata. Essa si ottiene projettando la figura di 6 tetraedri fasciali in un piano.

Parte III.

Un fascio di superficie di 4° ordine dotate di 12 punti doppî.

31. Abbiamo visto che le 16 rette h' sono intersezioni delle tre facce di tetraedri (A) (B) (C) e le 16 rette h uniscono tre a tre i vertici di essi, e viceversa le rette h congiungono tre a tre i vertici dei tetraedri della 2ª terna (P′) (P″) (P‴) e le rette h, sono le intersezioni delle facce di essi tre a tre. Onde è chiaro, che tanto le rette h quanto le rette h' sono la curva base e sviluppabile base di un fascio di superficie di 4° ordine e di una schiera di superficie di 4ª classe. — Noi considereremo solamente uno o l'altro fascio, è evidente che analoghe proprietà avranno anche le due schiere di superficie di 4ª classe. Le superficie del fascio per es. quello che ha per base le rette h hanno 12 punti doppî comuni, che sono precisamente i vertici dei tre tetraedri (A) (B) (C), che non appartengono al fascio.

Teorema LXIV. Le 16 rette h o h' sono la curva base e sviluppabile base di un fascio di superficie di 4° ordine e di una schiera di superficie di 4ª classe. Al fascio delle rette h appartengono i tre tetraedri della 2ª terna (P′) (P″) (P‴). Le superficie del fascio hanno 12 punti doppî comuni, che sono i vertici dei tetraedri della 1ª terna (A) (B) (C).

32. I piani polari di un punto $y_1\, y_2\, y_3\, y_4$ rispetto ai tre tetraedri di una terna s'incontrano dunque in una retta, così i poli di un piano sono situati in una retta corrispondente al piano. Questo si vede facilmente anche analiticamente. — Il piano polare del punto $y_1\, y_2\, y_3\, y_4$ rispetto al tetraedro (A) è

$$\Sigma \frac{x_1}{y_1} = 0$$

rispetto a (B), è

$$\Sigma x_1 \{ 2y_2\, y_3\, y_4 - y_1 (-y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2) \} = 0$$

rispetto a (C) è invece

$$\begin{gathered} x_1 \left\{ 2y_2 y_3 y_4 + y_1 (-y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2) \right\} + x_2 \left\{ 2y_1 y_3 y_4 + y_2 (y_1^2 - y_2^2 + y_3^2 + y_4^2) \right\} \\ + x_3 \left\{ 2y_1 y_2 y_4 + y_3 (\ y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 + y_4^2) \right\} - x_4 \left\{ 2y_1 y_2 y_3 + y_4 (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - y_4^2) \right\} = 0. \end{gathered}$$

Ora si vede benissimo, che questi tre piani appartengono ad un fascio, cioè:

$$\Sigma x_1 \left\{ 2y_2\, y_3\, y_4 - y_1 (-y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2) \right\} + \lambda \Sigma \frac{x_1}{y_1} = 0.$$

Per il piano del fascio che passa pel punto $y_1\, y_2\, y_3\, y_4$ stesso, ossia pel piano che unisce il punto con la sua retta corrispondente rispetto alla terna (A) (B) (C), si ha:

$$\lambda = 2y_1\, y_2\, y_3\, y_4 - \tfrac{1}{2} \Sigma y_1^2\, y_2^2 + \tfrac{1}{4} \Sigma y_1^4 .$$

Se invece considero la retta corrispondente al punto $-y_1\, y_2\, y_3\, y_4$ essa è data dal fascio

$$\begin{gathered} -x_1 \left\{ 2y_2 y_3 y_4 - y_1 (-y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2) \right\} + x_2 \left\{ 2y_1 y_3 y_4 - y_2 (y_1^2 - y_2^2 + y_3^2 + y_4^2) \right\} \\ - x_3 \left\{ 2y_1 y_2 y_4 - y_3 (\ y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 + y_4^2 \right\} + x_4 \left\{ 2y_1 y_2 y_3 - y_4 (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - y_4^2) \right\} \\ + \lambda \left(-\frac{x_1}{y_1} + \frac{x_2}{y_2} - \frac{x_3}{y_2} + \frac{x_4}{y_4} \right) = 0. \end{gathered}$$

Per il piano, che passa pel punto $-y_1\, y_2 - y_3\, y_4$ si ha:

$$\lambda = 2y_1\, y_2\, y_3\, y_4 - \tfrac{1}{2} \Sigma y_1^2\, y_2^2 + \tfrac{1}{4} \Sigma y_1^4$$

dalla qual cosa si osserva che i piani che congiungono i punti $y_1\, y_2\, y_3\, y_4$ e $-y_1\, y_2 - y_3\, y_4$ con le loro rette corrispondenti rispetto al fascio (A) (B) (C) sono due piani, che hanno le stesse coordinate rispetto ad (A) con due segni cambiati. Se si considera dunque un tetraedro 1234 fasciale con (A) e se ne congiungono i vertici con le 4 rette corrispondenti rispetto ai tetraedri della 1ª terna, si ottengono 4 piani, che formano pure un tetraedro fasciale con (A), vale a dire le 4 rette sono situate in un iperboloide. Questo iperboloide passa pure per le 4 rette corrispondenti ai vertici del tetraedro complementare di 1234 rispetto ad (A) (Teor. IX). Possiamo dire quindi che le rette corrispondenti dei punti di una configurazione K e di un ciclo V rispetto alla terna per es. (A) (B) (C) formano una configurazione K o un ciclo V, e i piani che congiungono i punti di K o di V con quelle rette corrispondenti formano alla lor volta un ciclo K o V. Dunque:

Teorema LXV. I tre piani polari di un punto rispetto ai tetraedri della 1ª terna s'incontrano in una retta R, quelli rispetto alla 2ª in una retta R_1. Analogamente per un piano.

Teorema LXVI. Le rette R che corrispondono ai 4 vertici di un tetraedro fasciale con un tetraedro della 1ª terna per es. (A) sono situate in un iperboloide. — Questo passa per le 4 rette R dei vertici del tetraedro complementare al 1° rispetto ad (A).

Teorema LXVII. Le rette corrispondenti R dei punti di una configurazione K o di un ciclo V, che si riferisce ai tetraedri della 1ª terna, formano una configurazione K o un ciclo V. I piani che le congiungono coi loro punti corrispondenti formano anch' essi un ciclo K o V.

33. I piani polari del punto $y_1\, y_2\, y_3\, y_4$ rispetto ai tetraedri della 2ª terna, riferiti ad (A) hanno per equazioni (vedi n. 4 (1) e (2)):

$$
\begin{aligned}
&(x_1 y_1 - x_3 y_3)\ (y_4^2 - y_2^2) + (x_4 y_4 - x_2 y_2)\cdot(y_1^2 - y_3^2) = 0 \\
&(x_1 y_1 - x_4 y_4)\ (y_2^2 - y_3^2) + (x_3 y_3 - x_2 y_2)\ (y_4^2 - y_1^2) = 0 \qquad (1) \\
&(x_1 y_1 - x_2 y_2)\ (y_3^2 - y_4^2) + (x_3 y_3 - x_4 y_4)\ (y_1^2 - y_2^2) = 0\,.
\end{aligned}
$$

Il conjugato di $y_1, y_2, y_3. y_4$ cioè $\frac{1}{y_1}, \frac{1}{y_2}, \frac{1}{y_3}, \frac{1}{y_4}$ rispetto al tetraedro (A) soddisfa tutte e tre l'equazioni (1), vale a dire i 3 punti conjugati di $y_1\, y_2\, y_3\, y_4$ rispetto ai tre tetraedri della 1ª terna (A) (B) (C) sono situati sulla retta R_1 di esso, ove s'incontrano cioè i suoi tre piani polari rispetto ai tre tetraedri della 2ª terna. Dunque:

Teorema LXVIII. Mentre la retta R di un punto P è l'intersezione dei tre piani polari di esso rispetto ai tetraedri della 1ª terna, la R contiene i tre conjugati di P rispetto ai tre tetraedri della 2ª terna. Analogamente per un piano Π.

Se del punto y_1, y_2, y_3, y_4 si determina il piano polare rispetto alla

$$S \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$$

il polo di questo piano rispetto ad un tetraedro della 1ª terna per es. (A) è $\frac{1}{y_1}, \frac{1}{y_2}, \frac{1}{y_3}, \frac{1}{y_4}$, ossia è il conjugato di $y_1\, y_2\, y_3\, y_4$ rispetto ad (A), od in altre parole le rette $R\, R_1$ del punto $y_1\, y_2\, y_3\, y_4$ sono le rette $R\, R_1$ del suo piano polare rispetto ad S. Dunque:

Teorema LXIX. Le rette R R_1 di P rispetto alle due terne conjugate della sestupla fondamentale coincidono con le rette R_1 R del suo piano polare Π rispetto alla S. Le rette R R_1 sono conjugate rispetto ad S, i 6 punti conjugati di P e i piani conjugati di Π rispetto ai 6 tetraedri della sestupla, sono rispettivamente poli e piani polari rispetto ad S.

34. Se di un punto P qualunque si trovano le 20 rette R corrispondenti rispetto alle 20 terne di tetraedri, che si possono formare con i 15 tetraedri fondamentali, esse contengono tre punti conjugati di P rispetto ai 15 tetraedri, ora siccome uno di questi tetraedri entra in 4 sestuple o per meglio dire in 4 terne, così è chiaro che le 20 rette R s'incontrano 4 a 4 in ciascuno dei 15 punti conjugati di P. Designiamo

i 15 punti colle combinazioni dei numeri I, II, III, IV, V, VI e le 20 rette R mediante i simboli I II III, I II IV ecc. Pel punto I II passano le 4 rette I II III, I II IV, I II V, I II VI, che contengono oltre I II i punti I III, II III; I IV, II IV; I V, II V; I VI; II IV; osservo che i punti I III, I IV, I V, I VI; II III, II IV, II V, II VI formano due tetraedri prospettivi pel centro I II i cui spigoli sono precisamente 12 rette R; il piano di prospettiva, come è facile di vedere, è dato dai 6 punti III IV, III V, IV V, IV VI, V VI, che si ottengono combinando due a due i numeri III IV V VI. Dunque i 15 punti sono situati 6 a 6 in 15 piani, che corrispondono ad essi e che contengono 4 rette R.

La figura così ottenuta è reciproca di sè stessa rispetto ad una superficie di 2° grado A rispetto alla quale le 20 rette sono due a due conjugate. La figura si scompone in 15 coppie di tetraedri prospettivi polari reciproci rispetto ad A. Ma v'ha di più; se consideriamo il pentagono gobbo (Fünfeck) completo

I II, I III, I IV, I V, I VI

i suoi 10 spigoli sono 10 rette R e le sue 10 facce sono 10 piani della figura; se consideriamo invece il pentapiano (Fünfflach) completo formato dai 5 piani rimanenti III IV V VI, II IV V VI, II III IV V, II III IV VI, II III V VI che corrispondono ai vertici del pentagono, i suoi 10 spigoli sono le altre 10 rette R e i suoi 10 vertici sono i 10 punti rimanenti. È chiaro altresì che il pentagono e il pentapiano completi non solamente sono polari reciproci rispetto alla superficie A, ma sono pure di per sè stessi polari rispetto ad A, perchè un vertice del pentapiano per es. II III ove s'incontrano le facce II III IV V, II III IV VI, II III V VI ha il piano polare I IV V VI, che passa per la retta R d'intersezione delle due facce rimanenti III IV V VI, II IV V VI. La figura corrispondente del piano è quella da me trovata nella mia Mem. sull'*Hexagr.*, ser. 3ª, vol. I. p. 653, formata da 10 punti 3 a 3 situati in 10 rette e reciproca di sè stessa rispetto ad una conica π. Dunque:

Teorema LXX. I 15 punti P′ conjugati di un punto P rispetto ai 15 tetraedri fondamentali sono situati 3 a 3 in 10 coppie di rette R e 6 a 6 in 15 piani Π′, che s'incontrano 3 a 3 nelle stesse rette R. Le 10 coppie di rette R sono le coppie di rette corrispondenti del punto P rispetto alle terne conjugate delle 10 sestuple di tetraedri fondamentali e le rette di esse sono quindi conjugate ordinatamente rispetto alle 10 superficie $S\,S_1 \ldots S_9$.

Teorema LXXI. La figura dei 15 punti P′ e piani Π′ è reciproca di sè stessa rispetto ad una superficie di 2° ordine A. Con essa si formano 15 coppie di tetraedri prospettivi e polari reciproci rispetto ad A. Essa si scompone in 6 gruppi di un pentagono gobbo e d'un pentapiano completi polari e polari reciproci rispetto ad A.

35. Il tetraedro (A) risguardato come superficie del 4° ordine ha per equazione

$$x_1 x_2 x_3 x_4 = 0$$

quella di (B)

$$(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)\,(x_1 - x_2 - x_3 + x_4)\,(-x_1 + x_2 - x_3 + x_4)\,(-x_1 - x_2 + x_3 + x_4) = 0$$

ossia

$$\Sigma x_i^4 - 2\Sigma x_i^2 x_k^2 + 24\, x_1 x_2 x_3 x_4 = 0$$

pel tetraedro (C) abbiamo invece:

$$\Sigma x_i^4 - 2\Sigma x_i^2 x_k^2 - 24\, x_1 x_2 x_3 x_4 = 0$$

onde il fascio di superficie, che ha per base le rette h', riferite ad uno dei tetraedri del fascio, ha per equazione:

$$\Sigma x_i^4 - 2\Sigma x_i^2 x_k^2 + (24 + \lambda)\, x_1 x_2 x_3 x_4 = 0\,. \tag{1}$$

Consideriamo invece il fascio di superficie, che ha per base le rette h e supponiamolo riferito ad uno dei tetraedri dei suoi punti doppî, per es. (A). La superficie del tetraedro (P′) è

$$(x_1 - x_2)\ (x_1 + x_2)\ (x_3 + x_4)\ (x_3 - x_4) = 0$$

ossia

$$x_1^2 x_3^2 + x_2^2 x_4^2 - (x_1^2 x_4^2 + x_2^2 x_3^2) = 0\,.$$

Analogamente per (P″) e (P‴)

$$x_1^2 x_2^2 + x_3^2 x_4^2 - (x_1^2 x_3^2 + x_2^2 x_4^2) = 0$$
$$x_2^2 x_3^2 + x_1^2 x_4^2 - (x_1^2 x_2^2 + x_3^2 x_4^2) = 0$$

onde il fascio di superficie del 4° ordine è

$$x_1^2 x_3^2 + x_2^2 x_4^2 + \lambda\,(x_1^2 x_2^2 + x_3^2 x_4^2) - (\lambda + 1)\,(x_1^2 x_4^2 + x_2^2 x_3^2) = 0\,.$$

Una superficie qualunque (2) non è altro che la polare reciproca della superficie dei centri di curvatura di una superficie di 2° grado. Infatti l'equazione della superficie dei centri di curvatura di un ellissoide è l'inviluppo delle superficie:

$$\frac{a^2 x^2}{(a^2 + \xi^2)^2} + \frac{b^2 y^2}{(b^2 + \xi)^2} + \frac{c^2 z^2}{(c_2 + \xi)^2} - 1 = 0 \quad (^1)$$

e la superficie polare reciproca rispetto alla sfera

$$x^2 + y^2 + z^2 - k^2 = 0$$

è l'inviluppo delle superficie

$$\frac{(a^2 + \xi)^2}{a^2} x^2 + \frac{(b^2 + \xi^2)^2}{b^2} y^2 + \frac{(c^2 + \xi)^2}{c^2} z^2 - k^2 = 0$$

che si pone definitivamente sotto la seguente forma omogenea

$$a'^2 x_2^2 x_3^2 + b'^2 x_1^2 x_3^2 + c'^2 x_1^2 x_2^2 + f'^2 x_1^2 x_4^2 + g'^2 x_2^2 x_4^2 + h'^2 x_3^2 x_4^2 = 0 \tag{3}$$
$$a' = a\,(b^2 - c^2)\,, \quad b' = b\,(c^2 - a^2)\,, \quad c' = c\,(a^2 - b^2)$$
$$f' = k\,b\,c \qquad g' = k\,c\,a \qquad h' = k\,a\,b$$

Egli è facile di vedere come l'equazione (3) si possa trasformare nella (2).

In un caso speciale delle superficie focali (Brennflächen) di 3 sistemi di rette di 2° ordine e di 6ª classe dotate di 12 punti doppî si presentò la superficie (2) (non il fascio (2)) a Kummer [2] sotto una forma un po' diversa, egli nota però che essa è la polare reciproca della superficie dei centri di curvatura di un ellissoide, ma siccome non è entrato nella discussione della superficie, così gli sono sfuggite le 16 rette, come sono sfuggite anche a Cayley che in una breve Nota [3] fece vedere come queste superficie di 12 punti doppî si possano dedurre da quelle di 8. Però

[1] Cayley, *On the centrosurface of an ellipsoid.* Transactions of the Cambridge Phil. Society, 1873.
[2] Kummer, *Ueber die alg. Strahlensysteme.* Abh. der Berl. Ak. 1866.
[3] Cayley, *On a quartic Surface.* Quartely Journ. XIV.

le proprietà delle superficie dei centri di curvatura delle superficie di 2° grado furono da molti studiate principalmente da Clebsch, Cayley e Darboux (¹), ma non ho trovato accennate in nessun sito le 16 rette e quindi tutte le proprietà, che qui sviluppo per le superficie reciproche.

36. Dato un punto di coordinate $y_1 y_2 y_3 y_4$ rispetto ad (A) situato in una superficie del fascio (2) è chiaro, che in essa è inscritto il ciclo V, a cui quel punto appartiene riferito ai tetraedri della 1ª terna; infatti il fascio si pone sotto la forma (2) anche rispetto a (B) e (C). Se congiungiamo i punti di V con le loro rette R corrispondenti si ottengono i piani tangenti alla superficie del 4° ordine del fascio che passa pel punto $y_1 y_2 y_3 y_4$, e questi, come si sa, formano pure un ciclo V. Da ciò si vede subito, che l'equazione in coordinate di piani della superficie non potrà contenere che le 2ᵉ o i multipli delle 2ᵉ potenze delle variabili. Ciò fa vedere pure, che se un punto o un piano tangente alla superficie è *singolare*, di questi punti o piani ce ne sono 96, almeno che il punto o piano non abbiano una posizione speciale rispetto ai tetraedri dei punti doppî, nel qual caso il ciclo V si riduce ad un ciclo di 16 o di 48 elementi.

Teorema LXXII. Il fascio di superficie di 4° ordine, che ha per base le rette h, riferito ad uno dei tetraedri del fascio della 2ª terna si mette sotto la forma:

$$i, k = 1, 2, 3, 4 \qquad \Sigma x_i - 2\Sigma x_i^2 x_k^2 + (24 + \lambda) x_1 x_2 x_3 x_4 = 0 \qquad (1)$$

e riferito invece ad un tetraedro dei suoi punti doppî per es. (A) si pone sotto la forma:

$$x_1^2 x_3^2 + x_2^2 x_4^2 + \lambda (x_1^2 x_2^2 + x_3^2 x_4^2) - (\lambda + 1)(x_1^2 x_4^2 + x_2^2 x_3^2) = 0 \qquad (2)$$

Teorema LXXIII. Dato un punto P in una superficie del fascio, che ha per base le rette h, in essa è inscritto il ciclo V, a cui dà luogo P rispetto ai tetraedri dei punti doppî del fascio, e i piani tangenti alla superficie nei punti di V formano pure un ciclo V.

Teorema LXXIV. In generale una superficie del fascio è della 12ª classe.

37. Se nell'equazione (1) (Teor. LXXII) si pone

$$\lambda = -24$$

si ottiene la superficie

$$\Sigma x_i^4 - 2\Sigma x_i^2 x_k^2 = 0 \qquad (3)$$

Cioè nel fascio c'è una superficie nella quale dato un punto, non solo il ciclo V corrispondente ad esso è inscritto nella superficie, ma bensì anche il ciclo V, che si ottiene da V trovando i conjugati di 1ª specie dei suoi punti rispetto a un tetraedro della 2ª terna. Di queste superficie nel fascio, che ha per base le rette h ce ne sono tre. Se nell'equazione (1) (Teor. LXXII) si pone $\lambda = -48$ si ottiene un tetraedro della 2ª terna, onde se ne conclude che le tre superficie (3) del fascio di rette h sono le conjugate armoniche dei tre tetraedri del fascio rispetto agli altri due.

Teorema LXXV. Se di uno dei tre tetraedri del fascio per es. (P′) si determina la superficie conjugata armonica rispetto agli altri

(¹) Clebsch, *Ueber das Problem der Normalen bei Curven und Flächen* 2 *Ordnung*. Crelle 64. — Cayley, l. c. — Darboux, Comptes Rendus, LXX.

due riferita a quel tetraedro, essa si mette sotto la forma:

$$\Sigma x_i^4 - 2\Sigma x_i^2 x_k^2 = 0 .$$

Un punto di essa dà luogo ad un ciclo V rispetto ai tetraedri della 1ª terna, inscritto in essa, il quale dà luogo ad un altro ciclo V pure inscritto in essa, trovando i conjugati di 1ª specie di esso rispetto al tetraedro (P') (Teor. LXVIII).

38. Nell'equazione (2) (Teor. LXXII) per ottenere la conjugata armonica del tetraedro $P_{14}\, P'_{14}\; P_{23}\, P'_{23}$ basta porre $\lambda = 1$. Ora supponiamo invece $\lambda = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ si ottengono allora le due seguenti superficie immaginarie:

$$x_1^2x_3^2 + x_2^2x_4^2 + \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}(x_1^2x_2^2 + x_3^2x_4^2) + \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}(x_1^2x_4^2 + x_2^2x_3^2) = 0 \quad (1)$$

$$x_1^2x_3^2 + x_2^2x_4^2 + \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}(x_1^2x_2^2 + x_3^2x_4^2) + \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}(x_1^2x_4^2 + x_2^2x_3^2) = 0. \quad (2)$$

Queste due superficie passano rispettivamente ciascuna per 8 rette h_0 (Teorema XXXVII). Infatti supponiamo che la superficie del fascio passi per uno dei punti E'

$$0, \; -2, \; 1 \pm i\sqrt{3}, \quad -(-1 \pm i\sqrt{3})$$

della retta $h' \equiv P'_{23}\, P'_{34}\, P'_{24}$ (n. 11) allora si trova precisamente

$$\lambda = \frac{-1 \mp i\sqrt{3}}{2} .$$

Se essa passa pel 1° punto E', è evidente che contiene tutte e due le rette h_0, che passano per E' e per i due punti E della retta h corrispondente, perchè esse hanno con la superficie 5 punti in comune. Ma una di queste rette h_0 si appoggia ad altre tre rette h' e quindi ad altre tre rette h_0 che sono ancora sulla superficie. Queste due superficie (1) e (2) rappresentano le superficie doppie dell' involuzione stabilita dai tre tetraedri del fascio e dalle loro conjugate armoniche rispetto agli altri due. Dunque:

Teorema LXXVI. Ci sono nel fascio di superficie di 4° ordine due superficie speciali immaginarie, che passano ciascuna per 8 rette h_0. Riferite ad un tetraedro dei loro punti doppî si mettono sotto la forma:

$$x_1^2\, x_3^2 + x_2^2\, x_4^2 + \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}(x_1^2\, x_2^2 + x_3^2\, x_4^2) + \frac{-1 \mp i\sqrt{3}}{2}(x_1^2\, x_4^2 + x_2^2\, x_3^2) = 0.$$

Esse rappresentano le superficie doppie dell'involuzione stabilita dai tre tetraedri del fascio e dalle loro conjugate armoniche rispetto agli altri due.

39. Un piano qualunque passante per una retta h incontra una superficie qualunque del fascio, che ha per base le rette h', in una curva del 3° ordine, la quale passa per i tre vertici di (A) (B) (C) situati in h e per i 6 punti d'incontro con le 6 rette h, che formano con la h due gruppi α (Teor. XXX), i quali 6 punti, come si sa, sono situati in una conica. Se il punto che determina la superficie del fascio è in questa conica, la curva del 3° ordine si riduce allora alla conica stessa ed alla retta h, onde l'iperboloide determinato dalle 6 ultime rette h, incontra la superficie

oltre che nelle 6 rette h, anche in una conica. Si deduce adunque, che in generale i 16 iperboloidi H incontrano una superficie del fascio, oltre che in 6 rette h, anche in una conica. I piani delle 16 coniche passano rispettivamente per le rette h corrispondenti ai 16 iperboloidi H. Siccome poi i 16 iperboloidi H formano un ciclo V ridotto (Teor. XLIX), così i 16 piani delle coniche e le coniche stesse formano un ciclo K speciale. Se la superficie del fascio è una delle superficie immaginarie del n. 36, le 16 coniche si riducono allora alle 16 coppie di rette h_0, che si ottengono dalle 8 rette h_0 della superficie. Dunque:

Teorema LXXVII. Uno qualunque dei 16 iperboloidi H, incontra una delle superficie del fascio, che ha per base le rette h, in 6 rette h e in una conica. I piani delle 16 coniche formano una configurazione K speciale. Uno di questi piani incontra ulteriormente la superficie in una retta, che cade sulla retta h, situata in esso. Le 16 coniche si riducono a 16 coppie di rette h_0, ottenute con le 8 rette h_0, situate in una delle superficie immaginarie del teorema precedente, se si tratta di queste superficie.

Si ha pure:

Teorema LXXVIII. Per un punto qualunque di uno spigolo qualunque dei tetraedri della sestupla fondamentale i piani polari rispetto alle superficie dell'uno o dell'altro fascio passano per lo spigolo opposto. Per un punto di una retta h' i piani polari rispetto alle superficie del fascio, che ha per base le rette h, passano per la retta h corrispondente.

40. Riprendo l'equazione (2), n. 36, cioè:

$$x_1^2 x_3^2 + x_2^2 x_4^2 + \lambda (x_1^2 x_2^2 + x_3^2 x_4^2) - (\lambda + 1)(x_1^2 x_4^2 + x_2^2 x_3^2) = 0 .$$

E si ponga
$$\mu x_i^2 = x_i' . \tag{2}$$

Il fascio si trasforma nel fascio di coni seguenti:

$$x_1' x_3' + x_2' x_4' + \lambda (x_1' x_2' + x_3' x_4') - (\lambda + 1)(x_1' x_4' + x_2' x_3') = 0 .$$

Supponendo che il tetraedro di riferimento dello spazio Σ' sia lo stesso tetraedro fondamentale di (Σ) cioè (A), si vede che i coni hanno per vertice comune il punto $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$ ossia B_1. Ad un punto P dello spazio Σ, come si vede da (2), corrisponde un solo punto P′ di Σ' ma viceversa ad un punto P′ di Σ' corrispondono 8 punti, che chiamo *associati armonici* e che formano un ciclo $(P)^8$ (Mem. I[a]), ossia due tetraedri fasciali complementari con (A). Essi sono, come già sappiamo, la completa intersezione di tre superficie di 2° ordine. Questo risulta anche dal fatto, che ai piani di Σ':

$$a_1 x_1' + a_2 x_2' + a_3 x_3' + a_4 x_4' = 0$$

corrispondono le superficie

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 + a_4 x_4^2 = 0$$

dello spazio Σ. Queste superficie, come si vede, avendo il tetraedro (A) come conjugato, soddisfano a 6 condizioni e perciò appartengono ad un sistema triplamente infinito (Gebüsch). Reye considerò il caso generale di questa trasformazione, facendo corrispondere ad una superficie di 2° ordine di un sistema triplamente infinito di uno spazio Σ il piano polare di un punto fisso O, preso rispetto ad essa. Ad un punto di Σ' corrispondono evidentemente 8 punti, intersezione di 3 superficie del sistema Σ, e che Reye chiama associati. Applica questa trasformazione con ammirabile maestria allo studio della superficie di Steiner e di altre superficie interessanti e considerando poi il caso in cui le superficie di 2° grado di Σ abbiano fino a 6 punti comuni, viene a considerare la superficie di Kummer [1]. Per quanto so, il prof. Reye ha tralasciato il caso, che sto io qui studiando, in cui i risultati della trasformazione generale si modificano alquanto e divengono più semplici ed eleganti.

Si dimostrano con semplicità i seguenti teoremi, che riunisco in un solo.

Teorema LXXIX. Nella trasformazione $\mu x_i^2 = x'_i$ ai piani dello spazio Σ' corrispondono le superficie di 2° grado di Σ che hanno il tetraedro fondamentale (A) come conjugato. Ad una retta di Σ' corrisponde una C^4 di 1ª specie. Ad un punto di Σ' corrispondono in Σ, 8 punti di un ciclo $(P)^8$, che formano cioè 2 tetraedri fasciali complementari col tetraedro fondamentale (A). Ad una retta di Σ', che passa per uno dei vertici di (A), corrisponde una C^4, che si scompone in 4 rette passanti per lo stesso vertice di (A). Ad una retta di Σ', che si appoggia a due spigoli opposti di (A) corrisponde una C^4, che si spezza nei 4 lati di un quadrangolo gobbo, i cui vertici sono posti in quei due spigoli.

Ad una retta di Σ corrisponde in Σ' una conica, che tocca le facce del tetraedro (A). Ad un piano di Σ corrisponde in Σ' una superficie di Steiner che ha per piani doppî le 4 facce di (A) ecc.

Teorema LXXX. Alle superficie del 4° ordine, che passano per le rette h, corrispondono in Σ' i coni di un fascio, che passano per i 4 vertici di (A) e hanno per vertice il vertice B_1 del tetraedro (B). Ad una generatrice di uno di questi coni corrisponde una C^4 situata sulla superficie di 4° ordine corrispondente, che passa per i vertici di (B) e (C). A due fasci projettivi di piani, che generano il cono, corrispondono due fasci di superficie di 2° grado di Σ, che generano la superficie di 4° ordine. Ad un piano tangente al cono corrisponde una superficie di 2° ordine, toccante in una C^4 la superficie del 4° ordine. Alle 8 rette h_0 situate in una delle superficie immaginarie del teorema LXXVI corrispondono 8 coniche in Σ', che toccano le facce di (A) e il cono corrispondente ecc.

Si potrebbero facilmente trasportare i teoremi di Pascal e Biranchon e le proprietà polari del cono a queste superficie del 4° ordine.

41. Se consideriamo invece la trasformazione $\mu x_i = \frac{1}{x'_i}$, le superficie del fascio (1), n. 38, si trasformano in sè medesime. Dunque:

Teorema LXXXI. Mentre un punto percorre una delle superficie del fascio, che ha per base le rette h, i suoi conjugati rispetto ai

[1] Nuova edizione della Geom. der Lage II Vol. e Vol. 85, Crelle.

tetraedri (A) (B) (C) si muovono pure nella superficie. Se un punto percorre una retta che tocca la superficie, i conjugati rispetto ad (A) (B) (C) si muovono in curve gobbe del 3° ordine, che passano rispettivamente pei vertici di (A) (B) e (C) e toccano la superficie. Alle 8 rette *ho* di una delle superficie immaginarie del teorema LXXIX corrispondono 24 cubiche gobbe situate sulla superficie ecc.

42. Se di un punto $y_1 y_2 y_3 y_4$ si trova la 1ª polare rispetto ad una qualunque delle superficie del fascio (2), n. 40, essa ha per equazione:

$$x_1 y_1 (x_3^2 + \lambda x_2^2 - (\lambda + 1) x_4^2) + x_2 y_2 (x_4^2 + \lambda x_1^2 - (\lambda + 1) x_3^2)$$
$$+ x_3 y_3 (x_1^2 + \lambda x_4^2 - (\lambda + 1) x_2^2) + x_4 y_4 (x_2^2 + \lambda x_2^2 - (\lambda + 1) x_1^2) = 0 .$$

Ora per uno dei punti doppî della superficie per es. A_1 $(1, 0, 0, 0)$ si riduce la 1ª polare al piano $x_1 = 0$ ed al cono

$$x_3^2 + \lambda x_2^2 - (\lambda + 1) x_4^2 = 0$$

che come si vede passa per le 4 rette h passanti per A_1. Ciò vuol dire che le generatrici del cono toccano la superficie di 4° ordine in A_1 in 4 punti infinitamente vicini, onde le generatrici del cono hanno un contatto di 3° ordine con la superficie; questo succede evidentemente per ogni punto doppio della superficie ossia per ogni vertice dei tre tetraedri (A) (B) (C). I coni di due vertici di (B) e (C) allineati con A_1, devono essere per le proprietà sviluppate due coni corrispondenti nell'omologia involutoria determinata da A_1 e dalla faccia $\alpha_1 \equiv A_2 A_3 A_4$, vale a dire i due coni devono incontrarsi in una conica di α_1 e devono perciò avere lungo la retta h lo stesso piano tangente, che è il piano della conica, secondo la quale l'iperboloide H, corrispondente a quella retta h, incontra la superficie (Teor. LXXVII); quindi i tre coni triplamente tangenti alla superficie nei vertici di (A) (B) (C) di una retta h s'incontrano due a due in una conica, situata sul piano opposto del terzo. Dunque:

Teorema LXXXII. La 1ª polare di un punto doppio per es. di A_1 delle superficie del fascio (h) rispetto alle medesime si riduce ad un cono ed alla faccia opposta α_1. I coni corrispondenti ai tre vertici dei tetraedri (A) (B) (C) di una retta h hanno lo stesso piano tangente 0, che è pure tangente alla superficie lungo la h (Teorema LXXVII), e s'incontrano due a due in una conica situata sulla faccia opposta del terzo.

43. Se del fascio (2) costruiamo la schiera reciproca rispetto ad S è chiaro che si ottiene la schiera (h'). Una qualunque delle superficie di essa è la superficie dei centri di curvatura di una superficie di 2° grado. In una tale superficie c'è una curva doppia del 24° ordine [1] e pel Teorema LXXIII un punto tanto della superficie quanto della curva doppia dà luogo ad un ciclo V inscritto in essa. I punti singolari della curva doppia devono formare dei cicli V. Le 48 cuspidi di essa (*outcrops*) formano un ciclo V ridotto, e siccome la curva tocca le facce dei 3 tetraedri (A) (B) e (C) in 16 punti O situati rispettivamente sulle rette h', così formano un ciclo speciale V ossia in tal caso una configurazione speciale K (Teor. XLVI). Dunque:

[1] Clebsch e Cayley, l. c.

Teorema LXXXIII. I tre tetraedri, ove si trovano le 12 coniche cuspidali e le 12 rispettive evolute della superficie dei centri di curvatura di una superficie di 2° grado formano una terna di tetraedri fasciali (A) (B) e (C). Ogni piano passante per una qualunque delle 16 rette h' è tangente alla superficie nel punto O di essa (Teor. LXXXII), ma le 16 rette h' non sono situate sulla superficie. Un punto qualunque o della superficie o della curva doppia dà luogo ad un ciclo V inscritto in essa. I 16 punti di contatto O della curva doppia con le 12 facce dei tetraedri (A) (B) (C) formano quindi una configurazione speciale K. Analogamente per le 48 cuspidi e per gli altri 48 punti d'intersezione della curva con le 12 facce.

INDICE

MEMORIA I.

Parte I.

Parte II.

MEMORIA II.

Parte I.

Parte II.

Parte III.